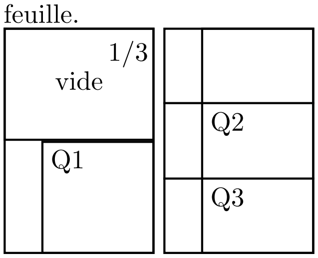
MPSI 2
DS 02

le 05 novembre 2003

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Exercice 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, on considère un triangle (ABC) avec $A\left|\begin{matrix}0\\a\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}b\\0\end{matrix}\right.$ et $C\left|\begin{matrix}c\\0\end{matrix}\right.$, $(a,b,c \neq 0)$.

$\boxed{Q\ 1}$ Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}$ circonscit au triangle (ABC).

$\boxed{Q\ 2}$ Écrire les équations cartésiennes des droites (AB) et (AC).

On considère un point $M\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ du plan. On note A' le projeté orthogonal du point M sur la droite (BC), B' le projeté orthogonal de M sur la droite (AC) et C' le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

$\boxed{Q\ 3}$ Trouver les coordonnées des points A', B', C'.

$\boxed{Q\ 4}$ Montrer que les points A', B', C' sont alignés si et seulement si le point M se trouve sur le cercle $\mathcal{C}$.

2 Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \ |x|y' + (x-1)y = x^2$$

$\boxed{Q\ 5}$ Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $I_1 =]0,+\infty[$.

$\boxed{Q\ 6}$ Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $I_2 =]-\infty,0[$.

$\boxed{Q\ 7}$

a. Montrer que $\forall x \in [-1,0]$,

$$\frac{x^3}{6} \leq e^x - \left[1 + x + \frac{x^2}{2}\right] \leq 0$$

b. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : [-1,0[\mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in [-1,0[, \ e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$$

$\boxed{Q\ 8}$ Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

3 Problème

On considère la fonction définie sur l'intervalle $I = [0,\pi]$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}}$$

$\boxed{Q\ 9}$

a. Vérifier que f est bien définie sur I, et montrer que pour deux réels positifs a, b, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (quantités conjuguées).

b. Étudier le signe de $f(x) - \sin x$ sur l'intervalle I.

c. On rappelle que $\forall x \in]0,\pi]$, $\sin x < x$. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle I.

$\boxed{Q\ 10}$ Étudier les variations de f sur l'intervalle I (on calculera $f(\pi/3)$, $f'(0)$ et $f'(\pi)$) et tracer son graphe.

On considère maintenant la fonction g définie sur $I = [0,\pi]$ par

$$g(x) = \arccos\left(\frac{4 - 5\cos x}{5 - 4\cos x}\right)$$

$\boxed{Q\ 11}$

a. Étudier les variations de la fonction

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{4-5t}{5-4t} \end{array} \right.$$

b. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0,\pi[$ et calculer sa dérivée.

c. Étudier la dérivabilité de g en 0 et en π, puis tracer le graphe de g.

$\boxed{Q\ 12}$ Soit $x \in [0,\pi/3]$.

a. Montrer qu'il existe un unique $z \in [\pi/3,\pi]$ tel que $f(x) = f(z)$.

b. Calculer $\cos\big(g(x)\big)$ et $\sin\big(g(x)\big)$.

c. Calculer $f\big(g(x)\big)$ et en déduire que $z = g(x)$.

$\boxed{Q\ 13}$ Soit $x \in [0,\pi/3]$.

a. Exprimer $\cos(x+z)$ et $\cos(x-z)$ comme une fraction rationnelle en $\cos x$ uniquement.

b. Étudier les variations des fonctions $\phi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi/3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t + g(t) \end{array} \right.$, $\phi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi/3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - g(t) \end{array} \right.$ et en déduire le signe de $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ et de $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$.

c. Exprimer $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$ en fonction de $f(x)$.

$\boxed{Q\ 14}$

a. Prouver que la restriction de f à l'intervalle $[0,\pi/3]$ est bijective à valeurs dans un intervalle J à préciser. On notera h sa bijection réciproque.

b. En utilisant la question précédente, déterminer la fonction h.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ L'équation d'un cercle est de la forme $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$. En traduisant que $A\begin{vmatrix}0\\a\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}b\\0\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$ sont sur le cercle, on trouve le système

$$\begin{cases} a\beta+\gamma &= -a^2\\ b\alpha+\gamma &= -b^2\\ c\alpha+\gamma &= -c^2\end{cases}$$

En résolvant, on en tire α, β, γ et l'équation du cercle :

$$\boxed{\mathcal{C}\ : x^2+y^2-(b+c)x-\frac{a^2+bc}{a}y+bc=0}$$

$\boxed{Q\ 2}$ La droite (AC) a pour équation cartésienne :

$$(AC)\ : ax+cy-ac=0$$

et un vecteur normal à cette droite est $\overrightarrow{n_1}\begin{vmatrix}a\\c\end{vmatrix}$. La droite (AB) a pour équation cartésienne

$$(AB)\ : ax+by-ab=0$$

et un vecteur normal à cette droite est $\overrightarrow{n_2}\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$.

$\boxed{Q\ 3}$ Si $M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$, en notant A' le projeté de M_0 sur (BC), on a $\boxed{A'\begin{vmatrix}x_0\\0\end{vmatrix}}$. Par un calcul d'intersection ($B'=M_0+\lambda\overrightarrow{n_1}$) et $B'\in(AC)$, on trouve que $\boxed{B'\begin{vmatrix}\dfrac{c(cx_0-ay_0+a^2)}{a^2+c^2}\\ \dfrac{a(-cx_0+ay_0+c^2)}{a^2+c^2}\end{vmatrix}}$. De même, en notant C' le projeté orthogonal de M_0 sur (AB), on trouve que $\boxed{C'\begin{vmatrix}\dfrac{b(bx_0-ay_0+a^2)}{a^2+c^2}\\ \dfrac{a(-bx_0+ay_0+b^2)}{a^2+b^2}\end{vmatrix}}$ (il suffit d'échanger b et c).

$\boxed{Q\ 4}$ Les trois points A',B',C' sont alignés si et seulement si $\mathrm{Det}(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})=0$, c'est à dire si et seulement si après calculs :

$$x_0^2+y_0^2-(b+c)x_0-\frac{a^2+bc}{a}y_0+bc=0$$

autrement dit si et seulement si le point M est sur le cercle circonscrit au triangle (ABC).

$\boxed{Q\ 5}$ L'équation a même ensemble de solutions que l'équation normalisée

$$(E_1):\ y'+\Bigl(1-\frac{1}{x}\Bigr)y=x$$

On trouve l'ensemble des solutions de l'équation homogène :

$$\mathcal{S}_H=\{Cxe^{-x};\ C\in\mathbb{R}\}$$

et une solution particulière (méthode de la variation de la constante) $y(x)=x$. L'ensemble des solutions de (E) sur I_1 est alors

$$\boxed{\mathcal{S}_1=\{x+Cxe^{-x};\ C\in\mathbb{R}\}}$$

$\boxed{Q\ 6}$ Sur l'intervalle I_2, l'équation (E) a même ensemble de solutions que l'équation normalisée

$$(E_2):\ y'+\Bigl(\frac{1}{x}-1\Bigr)y=-x$$

Les solutions de l'équation homogène sont

$$\mathcal{S} = \{C\frac{e^x}{x};\ C \in \mathbb{R}\}$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = C(x)\dfrac{e^x}{x}$. La méthode de la variation de la constante nous dit que y sera solution si et seulement si

$$\forall x \in I_2,\ C'(x)\frac{e^x}{x} = -x$$

On cherche donc une primitive $C(x) = -\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$ en intégrant deux fois par parties et l'on trouve $C(x) = (x^2+2x+2)e^{-x}$ puis $y(x) = x+2+2/x$. L'ensemble des solutions de (E) sur I_2 est donc

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \{x+2+\frac{2}{x}+C\frac{e^x}{x};\ C \in \mathbb{R}\}}$$

$\boxed{Q\ 7}$

a. Considérons la fonction définie sur $[-1{,}0]$ par $g(x) = e^x - (1+x+x^2/2)$. Elle est deux fois dérivable et l'on calcule $g'(x) = e^x - 1 - x$ puis $g''(x) = e^x - 1 \leq 0$. Comme $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$, on en déduit les variations de g :

x	-1	0
$g''(x)$	$-$	0
$g'(x)$	$\searrow$	0
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$\nearrow$	0

Et donc $\forall x \in [-1{,}0]$, $g(x) \leq 0$ ce qui donne la majoration demandée. De même, étudions la fonction définie sur $[-1{,}0]$ par $h(x) = e^x - (1+x+x^2/2) - x^3/6$. On calcule $h'(x) = e^x - 1 - x - x^2/2$, $h''(x) = e^x - 1 - x$, $h'''(x) = e^x - 1 \leq 0$ d'où les variations :

x	-1	0
$h'''(x)$	$-$	
$h''(x)$	$\searrow$	0
$h''(x)$	$+$	
$h'(x)$	$\nearrow$	0
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$\searrow$	0

et donc $\forall x \in [0{,}1]$, $h(x) \geq 0$ ce qui montre la deuxième inégalité.

b. Définissons la fonction ε sur $[-1{,}0[$ par $\varepsilon(x) = \dfrac{e^x - (1+x+x^2/2)}{x^2}$. D'après l'encadrement précédent, $\forall x \in [-1{,}0[$, $x/6 \leq \varepsilon(x) \leq 0$ et donc $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$\boxed{Q\ 8}$ On suppose que y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, on tire que $y(0) = 0$. Comme la restriction de y à $]-\infty{,}0[$ est une solution de (E) sur I_2 il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x < 0$, $y(x) = x+2+\dfrac{Ce^x+2}{x}$. Puisque y doit être dérivable donc continue en 0, on doit avoir $C = -2$ d'où $\forall x < 0$,

$$\begin{aligned} y(x) &= x+2+\frac{2}{x}(1-e^x) \\ &= x+2+\frac{2}{x}\big(-x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\big) \\ &= 2x\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Alors en formant le taux d'accroissement pour $x < 0$,

$$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 2\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$

on voit que y est dérivable à gauche en 0 et que $y'_g(0) = 0$. De même, puisque la restriction de y à l'intervalle I_1 est une solution de (E), il existe un constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $y(x) = x + Cxe^{-x}$. En formant le taux d'accroissement pour $x > 0$,

$$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 1 + Ce^{-x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1 + C$$

pour que y soit dérivable en 0, il faut que $1 + C = 0$, c'est à dire $C = -1$. Par conséquent,

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x + 2 + \dfrac{2(1 - e^x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x(1 - e^{-x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

et cette fonction est bien une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $\mathcal{S} = \{y\}$.

$\boxed{Q\ 9}$

a. Puisque $\forall x \in I$, $4\cos x \leq 4 < 5$, on a $5 - 4\cos x > 0$ et donc f est bien définie sur I. Puisque $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$, on en déduit la formule demandée.

b. On calcule pour $x \in I$,

$$f(x) - \sin x = -4 \frac{\sin(x)\big(1 - \cos x\big)}{\sqrt{5 - 4\cos x}\big(1 + \sqrt{5 - 4\cos x}\big)}$$

Par conséquent, $f(x) - \sin x \leq 0$ sur $[0,\pi]$.

c. On a donc $\forall x \in]0,\pi]$,

$$0 \leq f(x) \leq \sin x < x$$

Et puisque $f(0) = 0$, la seule solution de l'équation $f(x) = x$ sur I est $\boxed{x = 0}$.

$\boxed{Q\ 10}$ La fonction f est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions dérivables et $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x}{\sqrt{5 - 4\cos x}} - \frac{\sin x}{2\big(5 - 4\cos x\big)^{3/2}}(4\sin x) \\ &= \frac{-1}{(5 - 4\cos x)^{3/2}}\big(2\cos^2 x - 5\cos x + 2\big) \\ &= \frac{(2 - \cos x)(2\cos x - 1)}{(5 - 4\cos x)^{3/2}} \end{aligned}$$

(Pour factoriser $f'(x)$, on a cherché les racines du trinôme $2t^2 - 5t + 2$). On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$\pi/3$		π
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

On calcule $f'(0) = 1$ et $f'(\pi) = -1/3$.

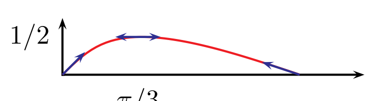


FIG. 1 – *Graphe de f*

$\boxed{Q\ 11}$

a. La fonction ϕ est une homographie dérivable sur $[-1,1]$ et $\forall t \in [-1,1]$, $\phi'(t) = \dfrac{-9}{(4t - 5)^2} < 0$. Par conséquent, ϕ est strictement décroissante et réalise une bijection de l'intervalle $[-1,1]$ vers l'intervalle

$[-1,1]$.

t	-1	1
$\phi'(t)$	$-$	
$\phi(t)$	$1 \searrow$	-1

b. Pour $x \in]0,\pi[$, $\cos x \in]-1,1[$ et donc $\phi(\cos x) \in]-1,1[$. Puisque la fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$, la fonction g est dérivable sur $]0,\pi[$ (composée de fonctions dérivables) et on calcule pour $x \in]0,\pi[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)^2}} \times \frac{-9}{(5-4\cos x)^2} \times (-\sin x) \\ &= \frac{-9\sin x}{\sqrt{9-9\cos^2 x}|5-4\cos x|} \\ &= -\frac{3\sin x}{|\sin x||5-4\cos x|} \\ &= \boxed{\frac{-3}{5-4\cos x}} < 0 \end{aligned}$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $[0,\pi]$:

x	0	π
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$\pi \searrow$	0

c. Puisque g est continue sur $[0,\pi]$, que g est dérivable sur $]0,\pi[$ et que $g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -3$, on en déduit d'après un théorème du cours que la fonction g est dérivable en 0 et que $\boxed{g'(0) = -3}$. De même, puisque $g'(x) \xrightarrow[x\to\pi]{} -1/3$, g est dérivable en π et $\boxed{g'(\pi) = -1/3}$.

$\boxed{Q\ 12}$

a. En reprenant le tableau de variations de f, f réalise une bijection de $[\pi/3,\pi]$ vers $[0,1/2]$. Puisque $f(x) \in [0,1/2]$, il existe un unique antécédant z de $f(x)$ par f dans l'intervalle $[\pi/3,\pi]$.

b. $\cos\big(g(x)\big) = \cos(\arccos(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x})) = \boxed{\dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x}}$ puisque $\dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x} \in [-1,1]$. On calcule de même

$$\begin{aligned} \sin(g(x)) &= \sqrt{1-\cos^2 g(x)} \quad (g(x)\in[0,\pi] \text{ donc } \sin g(x) \geq 0) \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)^2} \\ &= \boxed{\frac{3\sin x}{5-4\cos x}} \quad (\sin x \geq 0) \end{aligned}$$

c. Calculons

$$\begin{aligned} f\big(g(x)\big) &= \frac{\sin(g(x))}{\sqrt{5-4\cos g(x)}} \\ &= \frac{3\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}\sqrt{5(5-4\cos x)-4(4-5\cos x)}} \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} = f(x) \end{aligned}$$

Comme $g(\pi/3) = \arccos(1/2) = \pi/3$, on en déduit d'après les variations de g que puisque $x \in [0,\pi/3]$, $g(x) \in [\pi/3,\pi]$. Comme $f\big(g(x)\big) = f(x)$, par unicité de z, il vient que $z = g(x)$.

$\boxed{Q\ 13}$

a. En utilisant $\cos(x+z) = \cos x \cos g(x) - \sin x \sin g(x)$ et les expressions de $\cos g(x)$ et $\sin g(x)$, on trouve que $\boxed{\cos(x+z) = \dfrac{-2\cos^2 x + 4\cos x - 3}{5 - 4\cos x}}$ et de même, $\boxed{\cos(x-z) = \dfrac{-8\cos^2 x + 4\cos x + 3}{5 - 4\cos x}}$.

b. On calcule $\phi_1'(t) = \dfrac{2(1-2\cos t)}{5-4\cos t}$, $\phi_2'(t) = \dfrac{4(2-\cos t)}{5-4\cos t}$ d'où les variations de ces fonctions :

t	0		$\pi/3$
$\phi_1'(t)$		$-$	
$\phi_1(t)$	π	$\searrow$	$2\pi/3$

t	0		$\pi/3$
$\phi_2'(t)$		$+$	
$\phi_2(t)$	$-\pi$	$\nearrow$	0

On en déduit que $(x+z)/2 \in [\pi/3,\pi/2]$ et donc que $\cos((x+z)/2) \geq 0$. De même, $(x-z)/2 \in [-\pi/2,0]$ et donc $\cos((x-z)/2) \geq 0$.

c. En utilisant la trigonométrie, on calcule

$$\cos^2\left(\frac{x+z}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(\cos(x+z)+1\big) = \frac{\sin^2 x}{5-4\cos x}$$

$$\cos^2\left(\frac{x-z}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-z)+1\big) = \frac{4\sin^2 x}{5-4\cos x}$$

et puisque les cosinus sont positifs, on en tire que

$$\boxed{\cos\frac{x+z}{2} = f(x)} \text{ et } \boxed{\cos\frac{x-z}{2} = 2f(x)}$$

$\boxed{Q\ 14}$

a. Puisque f est strictement croissante de $[0,\pi/3]$ vers $[0,1/2]$, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0,\pi/3]$ vers $J = [0,1/2]$. La fonction h est donc définie sur $[0,1/2]$ à valeurs dans $[0,\pi/3]$.

b. Soit $x \in [0,\pi/3]$. On pose $y = f(x)$. Exprimons x en fonction de y. En posant $z = g(x)$, $y = \cos((x+z)/2)$ et $(x+z)/2 \in [\pi/3,\pi/2]$ d'où $(x+z)/2 = \arccos y$. Comme $2y = \cos((x-z)/2)$ et que $(x-z)/2 \in [-\pi/2,0]$, on a $(z-x)/2 = \arccos 2y$. En faisant la différence, on en tire $x = \arccos y - \arccos(2y)$ d'où

$$\boxed{\forall x \in [0,\pi/3],\ h(x) = \arccos(x) - \arccos(2x)}$$