$\boxed{\text{MPSI 2 : DL 08}}$

Pour le 07 mai 2004

1 Problème 1

L'objet du problème est l'étude de la fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{-x\ln(1+t^2)}dt$$

$\boxed{Q\ 1}$ Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

$\boxed{Q\ 3}$ À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\int_0^1 \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$ en fonction de F. En déduire la valeur de $F(2)$.

$\boxed{Q\ 4}$ Trouver une relation de récurrence entre $F(n+1)$ et $F(n)$.

$\boxed{Q\ 5}$ À l'aide de la formule du binôme, exprimer $F(-n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ à l'aide d'un signe somme. Calculer ensuite $F(-1)$ et $F(-2)$ (on exprimera le résultat sous forme d'une fraction irréductible).

$\boxed{Q\ 6}$ Étudier le sens de variations de F sur $\mathbb{R}$.

1.1 limite de F en $-\infty$

$\boxed{Q\ 7}$ Lorsque $x < 0$ est fixé, tracer le tableau de variations de la fonction définie par $g(t) = e^{-x\ln(1+t^2)}$ sur $[0,1]$ et exprimer $g(\frac{1}{2})$.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrer que $F(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \infty$.

$\boxed{Q\ 9}$ Calculer $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{F(x)}{x}$. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de F ?

1.2 Limite de F en $+\infty$

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer que $\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{t^2}{2} \leq \ln(1+t^2)$ et en déduire que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) \leq \int_0^1 e^{\frac{-xt^2}{2}}dt$$

$\boxed{Q\ 11}$ Montrer que la fonction $\phi(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}}du$ est bornée sur $[1,+\infty[$. Montrer ensuite grâce à un changement de variables que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2 Problème 2

Si n est un entier naturel, on note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note m_{ij} l'élément à la ligne i et à la colonne j d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice identité sera notée I_n. On appelle matrice *semi-magique* d'ordre n, une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel $\sigma(M)$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \sigma(M) \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sigma(M)$$

On notera $\mathbf{SM}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices semi-magiques d'ordre n. On appelle matrice *magique* d'orde n, une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui est semi-magique et telle qu'en plus :

$$\sigma(M) = \mathrm{Tr}(M) = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i+j=n+1}} m_{ij}$$

On notera $\mathbf{MG}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices magiques d'ordre n. On dit qu'une matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est un *vecteur propre* de la matrice M associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ lorsque $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$.

2.1 Généralités

$\boxed{Q\ 12}$ Montrer qu'une matrice M est semi-magique si la matrice colonne $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de M et ${}^tM$ associé à la même valeur propre.

$\boxed{Q\ 13}$ En déduire que l'ensemble des matrices semi-magiques $\mathbf{SM}_n(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier également que l'ensemble des matrices magiques $\mathbf{MG}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{Q\ 14}$ On note $E \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Vérifier que la matrice E est magique. Calculer pour $p \in \mathbb{N}^\star$, la matrice E^p.

$\boxed{Q\ 15}$

a. Montrer qu'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-magique si et seulement si on a

$$EM = ME = \sigma(M)E$$

b. Montrer que $(\mathbf{SM}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe et que l'application

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{SM}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^\star, \times) \\ M & \longmapsto & \sigma(M) \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes.

2.2 Étude des matrices magiques d'ordre 3

$\boxed{Q\ 16}$ On suppose dans cette question que $n = 3$.

a. Montrer que toute matrice magique de $\mathbf{MG}_3(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique et que cette décomposition est unique.
b. Déterminer toutes les matrices magiques antisymétriques de $\mathbf{MG}_3(\mathbb{R})$.
c. Construire toutes les matrices magiques symétriques de $\mathbf{MG}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle.
d. En déduire l'ensemble $\mathbf{MG}_3(\mathbb{R})$. On déterminera une base de cet espace.

On se propose de démontrer que si une matrice $M \in \mathbf{MG}_3(\mathbb{R})$, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, lorsque p est impair, la matrice M^p est magique.

$\boxed{Q\ 17}$ Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_9[X]$ non nul tel que $P(M) = 0_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})}$.

On admettra le théorème plus fort suivant (Hamilton-Cayley) : il existe deux réels $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$M^3 - \mathrm{Tr}(M).M^2 - \lambda M - \mu I_3 = 0_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})}$$

$\boxed{Q\ 18}$ On suppose dans cette question que $M \in \mathbf{MG}_3(\mathbb{R})$ vérifie de plus $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

a. Montrer que $\mu = 0$.

b. En déduire que pour tout entier p impair, la matrice M^p est magique.

$\boxed{Q\ 19}$ Soit une matrice $M \in \mathbf{MG}_3(\mathbb{R})$ de trace quelconque. On note

$$M_0 = M - \frac{\mathrm{Tr}(M)}{3} E$$

a. Calculer M^p.

b. En déduire que pour tout entier p impair, la matrice M^p est magique.

2.3 Le résultat précédent est faux pour $n = 4$

$\boxed{Q\ 20}$ Dans cette question, on suppose que $n = 4$ et on considère la matrice magique

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et de I_4.

b. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que

$$A^p = a_p A + b_p I_4$$

c. Montrer que pour tout entier $p \geq 2$, la matrice A^p n'est pas magique.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction définie par $g(t) = e^{-x\ln(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]$. L'intégrale $F(x)$ est donc bien définie.

$\boxed{Q\ 2}$ $\boxed{F(0) = 1}$, $F(1) = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$ d'où $\boxed{F(1) = \dfrac{\pi}{4}}$.

$\boxed{Q\ 3}$ On intègre $F(1) = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$ par parties, en posant $u(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $v'(t) = 1$. On trouve

$$F(1) = \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}F(1) - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Ensuite,

$$F(2) = \int_0^1 \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}dt = F(1) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}F(1)$$

On trouve donc $\boxed{F(2) = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}}$.

$\boxed{Q\ 4}$ On écrit

$$F(n+1) = \int_0^1 \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt = F(n) - \int_0^1 \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}dt$$

On intègre $F(n)$ par parties:

$$F(n) = \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

et en reportant, on trouve

$$\boxed{F(n+1) = \frac{2n-1}{2n}F(n) + \frac{1}{n2^{n+1}}}$$

$\boxed{Q\ 5}$ Avec le binôme,

$$F(-n) = \int_0^1 (1+t^2)^n dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{2k}dt = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}}$$

$\boxed{F(-1) = \dfrac{4}{3}}$, $\boxed{F(-2) = \dfrac{28}{15}}$.

$\boxed{Q\ 6}$ Puisque $\forall t \in [0,1]$, $\ln(1+t^2) \geq 0$, si $x \leq x'$,

$$\forall t \in [0,1], -x'\ln(1+t^2) \leq -x\ln(1+t^2)$$

et en intégrant cette inégalité, $F(x') \leq F(x)$. Donc F est *décroissante*.

$\boxed{Q\ 7}$ On calcule $g'(t) = \dfrac{-x}{(1+t^2)^x}\dfrac{2t}{(1+t^2)} > 0$. La fonction $g(t)$ est strictement croissante sur $[0,1]$ et $g(\frac{1}{2}) = e^{-x\ln\frac{5}{4}}$.

$\boxed{Q\ 8}$ La fonction g étant positive sur $[0,1]$, on minore à x fixé:

$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x\ln(1+t^2)}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x\ln(1+t^2)}dt \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)dt \geq g(\frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$$

Alors $F(x) \geq \dfrac{e^{-x\ln\frac{5}{4}}}{2}$ et en utilisant le théorème des gendarmes, puisque $\dfrac{e^{-x\ln\frac{5}{4}}}{2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, on en déduit que $\boxed{F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$.

$\boxed{Q\ 9}$ Soit $x < 0$. $\forall t \in [0,1]$, $g(t) \leq g(1)$ et donc $F(x) \leq 2^{-x}$. Comme $x < 0$, en divisant par x, on change le sens des inégalités et donc:

$$\frac{F(x)}{x} \geq \frac{2^{-x}}{x}$$

C'est l'exponentielle du numérateur qui l'emporte lorsque $x \to -\infty$ et donc $\dfrac{F(x)}{x} \to +\infty$. La courbe présente une branche parabolique de direction (Oy).

$\boxed{Q\ 10}$ Considèrons la fonction définie par $h(t) = \ln(1+t^2) - \dfrac{t^2}{2}$ sur $[0,1]$. Elle est dérivable et $h'(t) = \dfrac{t(1-t)}{1+t^2} \geq 0$. Puisque $h(0) = 0$, elle est positive sur $[0,1]$ d'où l'inégalité de l'énoncé. Alors $\forall t \in [0,1]$ et $x > 0$, $-x\ln(1+t^2) \leq -\dfrac{xt^2}{2}$ et $\forall t \in [0,1]$, $e^{-x\ln(1+t^2)} \leq e^{-\frac{xt^2}{2}}$. En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$ on obtient la majoration souhaitée.

$\boxed{Q\ 11}$ Soit $x \geq 0$. Puisque $\forall u \in [0,\sqrt{x}[$, $e^{-\frac{u^2}{2}} \leq e^{-\frac{u}{2}}$, $(u \geq 1 \Rightarrow u^2 \geq u)$, en intégrant, on obtient que

$$\phi(x) \leq \int_1^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u}{2}}\,du \leq 2\sqrt{e} - 2e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} \leq 2\sqrt{2}$$

et donc ϕ est bornée.

Alors, pour $x \geq 1$, par le changement de variables $\boxed{u = \sqrt{x}t}$ on obtient:

$$F(x) \leq \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int_0^1 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du + \phi(x)\right)$$

D'où l'encadrement

$$0 \leq F(x) \leq \frac{C}{\sqrt{x}}$$

où $C = \int_0^1 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du + 2\sqrt{e}$ est une constante indépendante de x. D'après le théorème des gendarmes, on conclut que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{Q\ 12}$ On calcule $MV = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ où $x_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}$ et ${}^tMV = (y_j)_{1\leq j\leq n}$ où $y_j = \sum_{i=1}^n m_{ij}$ Si une matrice M est magique, on a donc $MV = \sigma(M)V$ et ${}^tMV = \sigma(M)V$ ce qui montre que V est vecteur propre de M et de ${}^tM$ associé à la même valeur propre $\sigma(M)$. Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $MV = \lambda V$ et ${}^tMV = \lambda V$, alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $\lambda = \sum_{j=1}^n m_{ij} = \sum_{i=1}^n m_{ij}$ ce qui montre que la matrice M est semi-magique avec $\lambda = \sigma(M)$.

$\boxed{Q\ 13}$ Vérification facile à partir de la question 12, de la linéarité de la trace et de la forme linéaire définie par $\phi(M) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i+j=n+1}} m_{ij}$.

$\boxed{Q\ 14}$ Par récurrence, $E^p = n^{p-1}E$.

$\boxed{Q\ 15}$

a. On calcule $EM = ((a_{ij}))$ avec $a_{ij} = \sum_{k=1}^n e_{ik}m_{kj} = \sum_{k=1}^n m_{kj}$, et $ME = ((b_{ij}))$ avec $b_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik}e_{kj} = \sum_{k=1}^n m_{ik}$. d'où le résultat.

b. C'est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En effet, I_n est une matrice semi-magique avec $\sigma(I_n) = 1$, et si A,B sont inversibles semi-magiques, alors puisque $ABE = A(\sigma(B)E) = \sigma(B)AE = \sigma(B)\sigma(A)E$ et $EAB = \sigma(A)\sigma(B)E$, on voit que la matrice AB est encore semi-magique avec $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$. Si M est semi-magique inversible, en multipliant à droite par M^{-1}, on trouve que $E = \sigma(M)EM^{-1}$. Puisque $E \neq 0$, il vient que $\sigma(M) \neq 0$ et donc $EM^{-1} = \dfrac{1}{\sigma(M)}E$. De même, $M^{-1}E = \dfrac{1}{\sigma(M)}E$ ce qui montre que M^{-1} est semi-magique et que $\sigma(M^{-1}) = \dfrac{1}{\sigma(M)}$. Puisque $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$, l'application σ est bien un morphisme de groupes.

$\boxed{Q\ 16}$

a. On sait d'après le cours que $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ce qui montre l'unicité de la décomposition. Si M est magique, il existe donc deux matrices S (symétrique) et A (antisymétrique) telles que $M = S + A$, avec $S = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$. Il nous faut montrer que S et A sont magiques. Il suffit de démonter que ${}^tM$ est magique puisque $\mathbf{MG}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque $EM = \sigma(M)E$, en transposant puisque ${}^tE = E$, on trouve que ${}^tME = \sigma(M)E$ et de même, $E{}^tM = \sigma(M)E$. Cela montre que la matrice ${}^tM$ est semi-magique avec $\sigma({}^tM) = \sigma(M)$. De plus, $\mathrm{Tr}({}^tM) = \mathrm{Tr}(M) = \sigma(M)$ et $\sum_{i+j=n+1} \widetilde{m_{ij}} = \sum_{i+j=n+1} m_{ji} = \sum_{i+j=n+1} m_{ij} = \sigma(M)$ par le changement d'indices $(i,j) \mapsto (j,i)$. La matrice ${}^tM$ est donc magique, ainsi que les matrices S et A.

b. Une matrice antisymétrique s'écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ Si elle est magique, on doit avoir $-a-b = \sigma(A) = a+b$ ce qui montre que $\sigma(A) = 0$. Alors $b = -a$ et $c = a$ et donc la matrice doit s'écrire $A = a.\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a.E_1$ où $a \in \mathbb{R}$. Réciproquement, une matrice de cette forme est bien magique. L'ensemble des matrices magiques antisymétrique est donc une droite vectorielle engendrée par la matrice E_1.

c. Considérons une matrice S symétrique magique de trace nulle. Elle s'écrit $S = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & -a-b \end{pmatrix}$ et puisque $\sigma(S) = \mathrm{Tr}(S) = 0$, on doit avoir

$$\begin{cases} a+c+d &= 0 \\ c+b+e &= 0 \\ d+e-a-b &= 0 \\ b+2d &= 0 \end{cases}$$

ce qui conduit à $b = d = 0$ et $c = -a$, $e = a$. On trouve que

$$S = a.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = a.E_2$$

et réciproquement, toute matrice de cette forme est bien magique symétrique. Les matrices symétriques de trace nulle sont donc une droite vectorielle engendrée par la matrice E_2.

d. Soit M une matrice magique. Elle s'écrit de façon unique $M = S + A$ où S est magique symétrique et A magique antisymétrique. Posons $H = S - \dfrac{\mathrm{Tr}(S)}{3}E$. On remarque que $\mathrm{Tr}(H) = 0$. Par conséquent, $H \in \mathrm{Vect}(E_2)$ et donc $S = b.E_2 + c.E$ avec $(b,c) \in \mathbb{R}^2$. Finalement, il existe donc trois réels (a,b,c) tels que

$$M = a.E_1 + b.E_2 + c.E$$

On vérifie facilement que les trois matrices (E,E_1,E_2) sont magiques et forment un système libre de $\mathbf{MG}_3(\mathbb{R})$. C'est une base de $\mathbf{MG}_3(\mathbb{R})$ et donc $\mathbf{MG}_3(\mathbb{R})$ est de dimension 3. Toute matrice magique est donc de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} b+c & -a-b+c & a+c \\ a-b+c & c & -a+b+c \\ -a+c & a+b+c & -b+c \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma(M) = 3c$$

$\boxed{Q\ 17}$ Considérons le système formé des matrices $(I_3, M, M^2, \dots, M^9)$. Il est de cardinal 10 et comme $\dim(\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})) = 9$, il est lié. Il existe donc des réels $(a_0, \dots, a_9) \in \mathbb{R}^{10}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{9} a_i M^i = 0$. Il suffit alors de poser $P(X) = \sum_{i=0}^{9} a_i X^i \in \mathbb{R}_9[X]$. C'est un polynôme non nul et $P(M) = 0$.

$\boxed{Q\ 18}$

a. Si $\mu \neq 0$, on écrirait

$$M\Big[\frac{1}{\mu}(M^2 - \lambda I_3)\Big] = I_3$$

ce qui montre que M est inversible à droite donc inversible. Mais puisque M est semi-magique, on a vu à la question 15b que $\sigma(M) \neq 0$ ce qui est faux ici puisque $\sigma(M) = \mathrm{Tr}(M) = 0$.

b. On a donc $M^3 = \lambda M$. On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^{2k+1} = \lambda^k M$, ce qui montre que pour tout entier impair $p = 2k+1$, $M^p = \lambda^k M$ est magique (puisque $\mathbf{MG}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$).

$\boxed{Q\ 19}$

a. On a $M = \dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{3}E + M_0$. Or puisque M_0 est magique (combinaison linéaire de matrices magiques), et que $\sigma(M_0) = \mathrm{Tr}(M_0) = 0$, elle vérifie $EM_0 = M_0E = \sigma(M_0)E = 0$. Ce qui montre d'une part que les matrices E et M_0 commutent et d'autre part que si $k \geq 1$, $EM_0^k = 0$ et $EM_0^k = 0$. Utilisons la formule du binôme :

$$M^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{\mathrm{Tr}(M)^k}{3^k} E^k M_0^{p-k} = M_0^p + \frac{\mathrm{Tr}(M)^p}{3^p} E^p$$

(les matrices $E^k M_0^{p-k}$ sont nulles pour $k \in [\![1,p-1]\!]$). On a vu à la question 14 que $E^p = 3^{p-1}E$. On obtient finalement que

$$M^p = M_0^p + \frac{\mathrm{Tr}(M)^{p-1}}{3} E$$

b. Lorsque p est impair, d'après la question précédente, M_0^p est magique. La matrice E étant magique, puisque $\mathbf{MG}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que M^p est magique.

$\boxed{Q\ 20}$

a. On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_4 + A$$

b. Par récurrence. On trouve que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $a_{p+1} = a_p + b_p$, $b_{p+1} = 2a_p$.

c. Par l'absurde, si A^p était magique, en regardant la trace : $\sigma(A^p) = \mathrm{Tr}(A^p) = 2a_p + 4b_p$, et la somme des coefficients sur la première ligne, on aurait $\sigma(A^p) = 2a_p + b_p$, ce qui donnerait $b_p = 0$. Mais d'après les relations de récurrence, on montre facilement que $\forall p \geq 2$, $a_p > 0$ et $b_p > 0$.