MPSI 2 : DL

pour le 11 mars 2004

1 Polynômes de Legendre

On définit pour $n \in \mathbb{N}$, les polynômes à coefficients réels suivants :

$$P_0 = 1 \quad P_n = (X+1)^n(X-1)^n$$

$$L_n = P_n^{(n)}$$

Les polynômes L_n sont les polynômes de Legendre.

Q 1 Déterminer L_0, L_1 et L_2.

Q 2 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le polynôme L_n est de degré n. On précisera son coefficient dominant.

Q 3 Comparer les polynômes $L_n(-X)$ et $L_n(X)$.

Q 4 Déterminer pour un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et un entier $k \in [0,n-1]$, les valeurs $P_n^{(k)}(-1)$ et $P_n^{(k)}(1)$.

Q 5 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, le polynôme L_n est scindé, que toutes ses racines sont distinctes et qu'elles appartiennent toutes à l'intervalle $]-1,1[$.

Q 6 En utilisant la formule de Leibnitz, expliciter pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme L_n sous forme d'une somme de polynômes dans laquelle on fera apparaître des coefficients binômiaux. En déduire la valeur de $L_n(1)$ et de $L_n(-1)$.

Q 7 Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad P''_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1} \tag{2}$$

Q 8 Soit un entier $n \geq 1$. En dérivant n fois la relation (1) et $n-1$ fois la relation (2), trouver une relation simple liant L_{n+1}, L_n et L_{n-1}.

Q 9 En appliquant la formule du binôme de Newton au polynôme $P_n = (X^2-1)^n$, puis en dérivant n fois la formule obtenue, trouver la décomposition du polynôme L_n sur la base canonique. On exprimera les coefficients à l'aide de coefficients binômiaux.

2 Calcul de $\zeta(2)$

$\boxed{Q\ 10}$ Soit un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \notin \pi\mathbb{Z}$, et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\dfrac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1} a}$ sous la forme d'un polynôme en $\operatorname{cotan} a$.

$\boxed{Q\ 11}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver à l'aide de la question précédente les racines réelles du polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$$

$\boxed{Q\ 12}$ Calculer la somme des racines du polynôme $P(X)$.

$\boxed{Q\ 13}$ Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On rappelle que $\sin\theta < \theta < \tan\theta$. En déduire que $\operatorname{cotan}^2 \theta < \dfrac{1}{\theta^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 \theta$.

On définit la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$\boxed{Q\ 14}$ En utilisant l'inégalité précédente avec les racines de P, montrer que la suite (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

3 Polynômes de Tchebychev

$\boxed{Q\ 15}$ Montrer qu'il existe un polynôme T_n à coefficients entiers vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \tag{3}$$

$\boxed{Q\ 16}$ Expliciter les polynômes T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4.

$\boxed{Q\ 17}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \tag{4}$$

$\boxed{Q\ 18}$ En déduire le degré et le coefficient dominant du polynôme T_n.

$\boxed{Q\ 19}$ Écrire une procédure Maple `tchebychev : n : int, x : float` qui retourne le réel $T_n(x)$ pour $n \geq 2$.

$\boxed{Q\ 20}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, les polynômes T_n et T_{n+1} sont premiers entre eux.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ On trouve $L_0 = 1$, $L_1 = 2X$ et $L_2 = 12X^2 - 4$.

$\boxed{Q\ 2}$ puisque $\deg P_n = 2n$, on montre que pour $k \in [0,2n]$, $\deg P_n^{(k)} = 2n-k$, et par conséquent, $\deg L_n = \deg P_n^{(n)} = n$. Puisque

$$P_n = X^{2n} + \cdots$$

on obtient que $P_n^{(k)} = (2n)\dots(2n-k+1)X^{2n-k} + \cdots$ pour $k \in [0,2n]$ et en particulier,

$$L_n = (2n)(2n-1)\dots(n+1)X^n + \cdots$$

donc le coefficient dominant de L_n vaut $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!} = \boxed{A_{2n}^n}$.

$\boxed{Q\ 3}$ On a $P_n(X) = P_n(-X)$. On montre par récurrence sur k que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(X) = (-1)^k P_n^{(k)}(-X)$ et donc

$$L_n(X) = (-1)^n L_n(-X)$$

$\boxed{Q\ 4}$ Puisque le polynôme $(X-1)^n$ divise le polynôme P_n, 1 est racine d'ordre n du polynôme P_n. D'après le cours, $\forall k \in [0,n-1]$, $P_n^{(k)}(1) = 0$. Pour la même raison, $P_n^{(k)}(-1) = 0$.

$\boxed{Q\ 5}$ Montrons par récurrence la propriété suivante :

$\mathcal{P}(k)$: si $0 \le k \le n$, alors $P_n^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.
$\mathcal{P}(0)$ est vérifiée trivialement.
$\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ On suppose que $k+1 \le n$. D'après $\mathcal{P}(k)$, le polynôme $P_n^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes

$$-1 < x_1 < \cdots < x_k < 1$$

Or $k \le n-1$ donc d'après la question 4, 1 et -1 sont également racines de $P_n^{(k)}$. En définitive, le polynôme $P_n^{(k)}$ possède au moins $(k+2)$ racines distinctes dans l'intervalle $[-1,1]$. En appliquant le théorème de Rolle sur les segments $[-1,x_1]$, $[x_i,x_{i+1}]$ et $[x_k,1]$, on montre que la fonction $P_n^{(k+1)}$ s'annule au moins $(k+1)$ fois dans l'intervalle $]-1,1[$.
D'après $\mathcal{P}(n)$, le polynôme $L_n = P_n^{(n)}$ admet donc au moins n racines dans l'intervalle $]-1,1[$. Comme son degré vaut $n > 0$, il admet au plus n racines. On a donc montré que toutes les racines de L_n étaient distinctes, et qu'elles étaient toutes situées dans l'intervalle $]-1,1[$.

$\boxed{Q\ 6}$ Puisque $L_n = [(X+1)^n(X-1)^n]^{(n)}$, en utilisant la formule de Leibniz,

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(X+1)^n]^{(k)} [(X-1)^n]^{(n-k)}$$

Or si $a \in \mathbb{R}$ et $p \in [0,n]$, on montre que $[(X+a)^n]^{(p)} = n(n-1)\dots(n-p+1)(X+a)^{n-p} = A_n^p(X+a)^{n-p}$. Alors,

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_n^k A_n^{n-k} (X+1)^{n-k}(X-1)^k$$

et en simplifiant le coefficient, on trouve finalement que

$$L_n = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k$$

En faisant $x = 1$ dans cette formule, puisque pour $k \ge 1$, $(1-1)^k = 0^k = 0$, il ne reste que le terme correspondant à $k = 0$ dans la somme et donc $\boxed{L_n(1) = n!2^n}$ On trouve également que $\boxed{L_n(-1) = (-1)^n 2^n n!}$.

$\boxed{Q\ 7}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $P_{n+1} = (X+1)^{n+1}(X-1)^{n+1}$, en dérivant ce produit,

$$P'_{n+1} = (n+1)\left[(X+1)^n(X-1)^{n+1} + (X+1)^{n+1}(X-1)^n\right] = 2(n+1)XP_n$$

Soit $n \ge 1$. En dérivant la relation (1),

$$P''_{n+1} = 2(n+1)\left[P_n + XP'_n\right]$$

Mais d'après la relation (1), $P_n = 2nXP_{n-1}$. Donc

$$P''_{n+1} = 2(n+1)\left[P_n + 2nX^2P_{n-1}\right]$$

Mais

$$X^2P_{n-1} = (X^2-1)P_{n-1} + P_{n-1} = (X+1)^n(X-1)^n + P_{n-1} = P_n + P_{n-1}$$

Donc finalement,

$$P''_{n+1} = 2(n+1)\left[(1+2n)P_n + 2nP_{n-1}\right] = 2(n+1)(2n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1}$$

$\boxed{Q\ 8}$ Soit $n \geq 1$. Dérivons la relation (1) n fois en utilisant la formule de Leibnitz :

$$L_{n+1} = [P'_{n+1}]^{(n)} = 2(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{(k)}P_n^{(n-k)}$$

Mais pour $k \geq 2$, $X^{(k)} = 0$. Il ne reste donc que deux termes dans la somme :

$$L_{n+1} = 2(n+1)\left[XL_n + nP_n^{(n-1)}\right]$$

Dérivons ensuite $(n-1)$ fois la relation (2) :

$$\begin{aligned} L_{n+1} = [P''_{n+1}]^{(n-1)} &= 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)P_{n-1}^{(n-1)} \\ &= 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)L_{n-1} \end{aligned}$$

En éliminant $P_n^{(n-1)}$ des deux relations ci-dessus, on trouve que

$$\boxed{L_{n+1} = 2(2n+1)XL_n - 4n^2L_{n-1}}$$

$\boxed{Q\ 9}$ Utilisons la formule du binôme :

$$P_n = (X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^kX^{2n-2k}$$

Dérivons n fois chacun des termes de la somme. Lorsque $2n-2k < n$, $\left[X^{2n-2k}\right]^{(n)} = 0$. Par conséquent, il suffit de garder les termes de la somme correspondant à un indice k tel que $2n-2k \geq n$, c'est à dire $k \leq n/2$. Donc l'entier k varie entre 0 et $E(n/2)$. D'autre part, les dérivées successives de X^{2n-2k} s'expriment facilement :

$$\begin{aligned} \left[X^{2n-2k}\right]^{(n)} &= (2n-2k)(2n-2k-1)\dots(2n-2k-n+1)X^{2n-2k-n} \\ &= \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}X^{n-2k} \\ &= n!\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!n!}X^{n-2k} \\ &= n!\binom{2n-2k}{n}X^{n-2k} \end{aligned}$$

Et donc

$$L_n = n!\sum_{k=0}^{E(n/2)}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}X^{n-2k}$$

$\boxed{Q\ 10}$ Écrivons :

$$\begin{aligned}
\sin\big[(2n+1)a\big] &= \frac{e^{i(2n+1)a} - e^{-i(2n+1)a}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}\Big[(\cos a + i\sin a)^{2n+1} - (\cos a - i\sin a)^{2n+1}\Big] \\
&= \frac{1}{2i}\Big[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} i^k\big(1-(-1)^k\big)\sin^k a\cos^{2n+1-k} a\Big] \\
&= \frac{1}{i}\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} i^k \sin^k a\cos^{2n+1-k} a \\
&= \frac{1}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1}\sin^{2p+1} a\cos^{2(n-p)} a \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\sin^{2p+1} a\cos^{2(n-p)} a
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1} a} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\frac{\cos^{2(n-k)} a}{\sin^{2(n-k)} a} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\operatorname{cotan}^{2(n-k)} a
\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$\boxed{Q(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k X^{2(n-k)}}$$

et on a bien $\dfrac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1} a} = Q\big(\operatorname{cotan}(a)\big)$.

$\boxed{Q\ 11}$ Si $a \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1} a} = 0 \iff (2n+1)a = k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \iff a = \frac{k\pi}{2n+1},\ (k\in\mathbb{Z})$$

Si l'on pose

$$\boxed{\alpha_k = \operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1},\ k\in[\![1,n]\!]}$$

D'après la question 10, $P(\alpha_k) = 0$. On a donc trouvé n racines distinctes du polynôme P qui est de degré n. Par conséquent, les racines de P sont les réels α_k, pour $k\in[\![1,n]\!]$. Ce polynôme est scindé à racines simples.

$\boxed{Q\ 12}$ En utilisant les relations coefficients-racines d'un polynôme,

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

où $a_n = \dbinom{2n+1}{1} = 2n+1$ et $a_{n-1} = -\dbinom{2n+1}{3}$. Par conséquent,

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \boxed{\frac{n(2n-1)}{3}}$$

$\boxed{Q\ 13}$ Il suffit de remarquer que $1+\operatorname{cotan}^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta} > \dfrac{1}{\theta^2}$.

$\boxed{Q\ 14}$ Avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$, $(k\in[\![1,n]\!])$, On trouve que

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k < \sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < n + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k$$

d'où l'on tire

$$\pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2 n}{(n+1)^2} + \pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n-1)^2}$$

Comme les deux suites encadrantes convergent vers $\frac{\pi^2}{6}$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (S_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

$\boxed{Q\ 15}$ C'est un calcul trigonométrique fait en cours. On trouve que

$$\boxed{T_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{n-k} (1-X^2)^k}$$

$\boxed{Q\ 16}$ On trouve que $\boxed{T_0 = 1}$, $\boxed{T_1 = X}$, $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1}$, $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$ et $\boxed{T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1}$.

$\boxed{Q\ 17}$ Posons $H = T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n \in E$. Soit $x \in [-1,1]$, $\exists \theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$. Alors

$$\begin{aligned} H(x) &= T_{n+2}(\cos\theta) - 2\cos\theta T_{n+2}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta) \\ &= \cos[(n+2)\theta] - 2\cos\theta\cos[(n+1)\theta] + \cos(n\theta) \end{aligned}$$

Mais puisque $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, il vient que $H(x) = 0$, ce qui montre que le polynôme H possède une infinité de racines. Il est donc nul d'après un théorème.

$\boxed{Q\ 18}$ Par récurrence, on montre en utilisant la relation 4 que $\deg T_n = n$ et que son coefficient dominant vaut 2^{n-1}.

$\boxed{Q\ 19}$ On utilise la relation 4, et l'invariant de boucle placé en commentaire :

```
tchebychev := proc(n, x)
  local P, PP;
  P := 1;
  PP := x;
  for i from 2 to n do
    temp := PP;
    PP := 2 * x * PP - P;
    P := temp;
    # INV : P = T_{i-1}(x), PP = T_i(x)
  od;
  PP;
end;
```

$\boxed{Q\ 20}$ Par récurrence, $\mathcal{P}(n)\ : T_n \wedge T_{n+1} = 1$. Puisque $T_0 = 1$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. D'après $\mathcal{P}(n)$ et le théorème de Bezout, il existe deux polynômes $(U,V) \in E^2$ tels que $UT_n + VT_{n+1} = 1$. En multipliant la relation 4 par U on obtient alors

$$UT_{n+2} = 2XUT_{n+1} - UT_n = 2XUT_{n+1} - (1 - VT_{n+1})$$

ce qui donne

$$(2XU + V)T_{n+1} - UT_{n+2} = 1$$

et d'après Bezout, on en déduit que T_{n+1} et T_{n+2} sont premiers entre eux.