MPSI 2 : DL 05

pour le 06 février 2004

1 Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

1.1 Classification des sous-groupes de $\mathbb{R}$

Pour un réel strictement positif $\alpha > 0$, on note $\alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Q 1 Montrez que $\forall \alpha > 0$, la partie $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R},+)$.

Q 2 Montrez que $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

On considère maintenant un sous-groupe G du groupe $(\mathbb{R},+)$. On va montrer l'alternative :

1. G est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$;
2. ou alors G est une partie dense de $\mathbb{R}$.

On note

$$G^+ = G \cap]0,+\infty[= \{x \in G \mid x > 0\}$$

Q 3 Si l'on suppose que $G \neq \{0\}$, montrez que la partie G^+ est non-vide, et qu'elle admet une borne inférieure $\alpha \geq 0$. Que vaut cette borne inférieure α lorsque $G = \mathbb{Z}$ et lorsque $G = \mathbb{Q}$?

On suppose dans un premier temps que $\alpha > 0$.

Q 4 Montrez que $\alpha \in G^+$. On pourra pour cela raisonner par l'absurde et utiliser la caractérisation de la borne inférieure avec $\varepsilon = \alpha$.

Q 5 Montrez alors que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

On suppose maintenant que $\alpha = 0$.

Q 6 Montrez que la partie G est dense dans $\mathbb{R}$.

1.2 Applications

On considère deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On définit alors

$$G(a,b) = \{pa + qb \ ; \ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Q 7 Montrez que $G(a,b)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Q 8 On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{5}$.

1. Montrez que la borne inférieure α de G^+ vérifie $\alpha \geq \dfrac{1}{15}$;
2. Déterminez deux entiers $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $5u + 3v = 1$;
3. En déduire que $G(1/3,1/5) = \dfrac{1}{15}\mathbb{Z}$.

Q 9 On suppose dans cette question que $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$. On note α la borne inférieure de la partie G^+.

1. Montrez que le réel $\sqrt{3}$ est irrationnel ;

2. Montrez que $\alpha = 0$.

On a donc montré que le sous-groupe $G(1,\sqrt{3})$ était dense dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{Q\ 10}$ On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue qui est à la fois 1-périodique et $\sqrt{3}$-périodique. On notera

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(0)\}$$

1. Montrez que $G(1,\sqrt{3}) \subset H$;
2. Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de H qui converge vers le réel x ;
3. En déduire que la fonction f est constante.

$\boxed{Q\ 11}$ **Optionnelle.** Montrer que les trajectoires d'une boule dans un billard rectangulaire sont périodiques ou alors denses.

2 Dénombrement des involutions d'un ensemble fini

Soit un ensemble E. On note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des *involutions* de l'ensemble E :

$$\mathcal{I}(E) = \{f \in \mathcal{F}(E,E) \mid f \circ f = \mathrm{id}_E\}$$

$\boxed{Q\ 12}$ Montrez qu'une involution est bijective.

$\boxed{Q\ 13}$ Soient deux ensembles E et F équipotents, c'est à dire qu'il existe une bijection $\phi : E \mapsto F$. Montrez qu'il existe une bijection θ entre les ensembles $\mathcal{I}(E)$ et $\mathcal{I}(F)$.

Lorsque l'ensemble E est fini de cardinal n, on note I_n le nombre d'involutions de E : $I_n = |\mathcal{I}(E)|$.

$\boxed{Q\ 14}$ Déterminez I_1 et I_2.

On considère désormais l'ensemble fini $E = [\![1,n]\!]$ avec $n \geq 3$. On note

$$\mathcal{I}_k = \{f \in \mathcal{I}(E) \mid f(n) = k\}$$

$\boxed{Q\ 15}$ Montrez que la famille $(\mathcal{I}_k)_{1\leq k\leq n}$ forme une partition de l'ensemble $\mathcal{I}([\![1,n]\!])$.

$\boxed{Q\ 16}$ Montrez qu'il existe une bijection entre les ensembles $\mathcal{I}_n$ et $\mathcal{I}([\![1,n-1]\!])$, puis qu'il existe une bijection entre les ensembles $\mathcal{I}_k$ et $\mathcal{I}([\![1,n-2]\!])$ pour $k \in [\![1,n-1]\!]$. (On se contentera d'exhiber ces bijections et de vérifier qu'elles sont bien définies sans faire en détail les preuves qu'elles sont bijectives).

$\boxed{Q\ 17}$ Montrez que $\forall n \geq 3$, on a une relation permettant d'exprimer I_n en fonction de I_{n-1}, I_{n-2} et n.

$\boxed{Q\ 18}$ On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{I_n}{n!}$ qui représente la probabilité pour qu'une bijection de $[\![1,n]\!]$ soit une involution.

a) Montrez que $\forall n \geq 3$, $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n-2}}{n}$.

b) Montrez que la suite (u_n) converge vers 0.

$\boxed{Q\ 19}$ Montrez que $\forall n \geq 1$:

$$I_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2n}{2k}$$

$$I_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2n+1}{2k}$$

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Vérifions que $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R},+)$:

- $0 \in \alpha\mathbb{Z}$ $(0 = 0 \times \alpha)$;
- Soient deux éléments $(x,y) \in (\alpha\mathbb{Z})^2$. Montrons que $(x-y) \in \alpha\mathbb{Z}$. Comme $x \in \alpha\mathbb{Z}$, il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $x = k_1\alpha$. De même, il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $y = k_2\alpha$. Alors $x - y = (k_1 - k_2)\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$.

$\boxed{Q\ 2}$ On le vérifie facilement comme à la première question.

$\boxed{Q\ 3}$ Comme on suppose que $G \neq \{0\}$, il existe un élément $g \neq 0$ dans la partie G. Comme G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, son symétrique $-g$ est également un élément de G. L'un des deux éléments g ou $-g$ est strictement positif et appartient donc à l'ensemble G^+. Par conséquent, $G^+ \neq \emptyset$.
Comme G^+ est une partie non-vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0, elle admet une borne inférieure α et puisque 0 est un minorant de G^+, $0 \leq \alpha$ (la borne inférieure d'une partie est le plus grand des minorants).

$\boxed{Q\ 4}$ Supposons par l'absurde que $\alpha \notin G$. D'après la caractérisation de la borne inférieure de G^+, avec $\varepsilon = \alpha > 0$, il existe $g_1 \in G^+$ tel que $\alpha < g_1 < 2\alpha$. En posant ensuite $\varepsilon = g_1 - \alpha > 0$, il existe $g_2 \in G^+$ tel que $\alpha < g_2 < g_1$. Posons $g = g_1 - g_2$. Puisque G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, $g_1 - g_2 \in G$. Or $g > 0$ et donc $g \in G^+$. Mais alors on aurait $\alpha < g_2 < g_1 < 2\alpha$, et donc $0 < g < \alpha$, ce qui est impossible puisque $\alpha = \inf G^+$.

$\boxed{Q\ 5}$ Comme $\alpha \in G$, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n\alpha \in G$. Par récurrence sur n :

$$\mathcal{P}(n) \ : n\alpha \in G$$

$\mathcal{P}(0)$ est vérifiée puisque comme G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, $0 \in G$.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ D'après $\mathcal{P}(n)$, $n\alpha \in G$. Comme $\alpha \in G$ et que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, $\alpha + n\alpha \in G$. Donc $(n+1)\alpha \in G$.
Ensuite, montrons que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k\alpha \in G$. Si $k \geq 0$, on a montré que $k\alpha \in G$. Si $k < 0$, alors $-k \in \mathbb{N}$ donc $(-k)\alpha \in G$. Mais comme G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, le symétrique d'un élément est encore dans G. Par conséquent, $-(-k)\alpha = k\alpha \in G$.
On a donc montré que $\boxed{\alpha\mathbb{Z} \subset G}$. Montrons maintenant que $\boxed{G \subset \alpha\mathbb{Z}}$.
Soit $g \in G$. Comme $\alpha > 0$, d'après un théorème du cours, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\alpha \leq g < (k+1)\alpha$. On a $0 \leq g - k\alpha < \alpha$. Mais comme $k\alpha \in G$ (montré précédemment) et que $g \in G$, puisque G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, il vient que $h = g - k\alpha \in G$. Or $\alpha = \inf G^+$, et donc il est impossible que $h > 0$ puisque $h < \alpha$. Par conséquent, la seule possibilité est que $h = 0$, c'est à dire $g = k\alpha$. Mais alors $g \in \alpha\mathbb{Z}$.

$\boxed{Q\ 6}$ Soit un réel $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $g \in G$ tel que $|g - x| \leq \varepsilon$.
Comme $0 = \inf G^+$, par la caractérisation de $\inf G^+$, il existe un élément $g^+ \in G^+$ tel que $0 < g^+ < \varepsilon$. Alors d'après un théorème du cours, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $kg^+ \leq x < (k+1)g^+$. On a alors $0 \leq x - kg^+ < g^+ < \varepsilon$. Mais puisque $g^+ \in G$, et que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, on a $kg^+ \in G$. Posons donc $g = kg^+ \in G$. Puisque $0 \leq x - g < \varepsilon$, on a bien $|x - g| \leq \varepsilon$.

$\boxed{Q\ 7}$ On le montre facilement.

$\boxed{Q\ 8}$

1. Soit $g \in G(1/3,1/5)^+$. Il existe $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $g = \dfrac{p}{3} + \dfrac{q}{5} = \dfrac{5p+3q}{15}$. Mais comme l'entier $(3p+5q)$ est non nul ($g \in G^+$), il vérifie $|3p + 5q| \geq 1$ et donc $g = |g| \geq \dfrac{1}{15}$. Donc $1/15$ est un minorant de l'ensemble G^+ et donc sa borne inférieure vérifie $1/15 \leq \alpha$.
2. Il suffit de poser $u = 2$ et $v = -3$.
3. Comme $1/15 \in G^+$, on a $\alpha \leq 1/15$ et d'après la question précédente, on tire que $\alpha = 1/15$.
4. Comme $G(1/3,1/5)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, et que $\alpha > 0$, d'après l'étude précédente, on sait que $G(1/3,1/5) = \alpha\mathbb{Z}$.

$\boxed{Q\ 9}$

1. Par l'absurde, si $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, il existerait $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\sqrt{3} = p/q$, mais alors on aurait $3q^2 = p^2$. Or en examinant la décomposition de p^2 en facteurs premiers, on voit que la puissance de 3 doit être paire, alors que dans la décomposition de $3q^2$ en facteurs premiers, cette puissance est impaire, une absurdité.
2. Par l'absurde, si $\alpha > 0$, on aurait alors $G(1,\sqrt{3}) = \alpha\mathbb{Z}$. Par conséquent, puisque $1 \in G$ et que $\sqrt{3} \in G$, il existerait deux entiers $(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $1 = q\alpha$ et $\sqrt{3} = p\alpha$. On aurait alors $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, une absurdité.

Q 10

- On montre facilement par récurrence que $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$, puis que $\forall q \in \mathbb{Z}$, $f(x+q\sqrt{3}) = f(x)$ et enfin que $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}$, $f(p+q\sqrt{3}) = f(0)$. Donc $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $p+q\sqrt{3} \in H$ et donc $G(1,\sqrt{3}) \subset H$.
- Puisque $G(1,\sqrt{3})$ est dense dans $\mathbb{R}$,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists h \in H \text{ tq } |x-h| \leq \varepsilon$$
En particulier, si $n \in \mathbb{N}^\star$, en prenant $\varepsilon = 1/n > 0$, il existe $x_n \in H$ tel que $|x - x_n| \leq 1/n$. On construit ainsi une suite d'éléments de $G(1,\sqrt{3})$ c'est à dire d'éléments de H qui converge vers le réel x.
- Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite de points (x_n) de H telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Or puisque $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $x_n \in H$, on a $f(x_n) = f(0)$. Comme la fonction f est continue au point x, et que la suite (x_n) converge vers x, d'après le théorème de l'image continue d'une suite, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(x)$. Or puisque la suite $\big(f(x_n)\big)$ est constante, elle converge également vers $f(0)$. Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x) = f(0)$. On a montré que la fonction f était constante.

Q 11 En «dépliant» le billard on peut voir une trajectoire de bille comme une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \alpha x + \beta$. Notons a et b les côtés du billard. Soit un point du billard $X = (x,y) \in [0,a] \times [0,b]$. Considérons les points de la forme $X_{p,q} = (x + 2pa, y + 2qb)$. Ces points correspondent tous au point X dans le billard non-déplié. Lorsque $\dfrac{a\alpha}{b}$ est irrationnel, nous allons montrer que la trajectoire est dense. La distance du point $X_{p,q}$ à la droite $\mathcal{D}$ vaut
$$d(X_{p,q},\mathcal{D}) = \frac{|y + 2qb - \alpha(x+2pa) - \beta|}{\sqrt{1+\alpha^2}} \leq |(y - \alpha x - \beta) + (2qb - 2p\alpha a)|$$
Mais on montre comme aux questions précédentes que $G = \{2qb - 2p\alpha a;\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ dense. Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$ il existe $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|t - 2qb - 2p\alpha a| = d(X_{p,q},\mathcal{D}) \leq \varepsilon$ (où l'on a posé $t = y - \alpha x - \beta$). La trajectoire est bien dense.

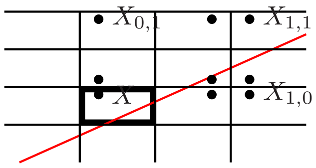

FIG. 1 – *Billard déplié*

Q 12 Soit une involution $f \in \mathcal{I}(E)$. Puisque $f \circ f = \mathrm{id}$ et que id est bijective, on en déduit d'après un théorème du cours que f est injective et surjective.

Q 13 Introduisons l'application
$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{I}(E) & \longrightarrow & \mathcal{I}(F) \\ f & \longmapsto & \phi \circ f \circ \phi^{-1} \end{array} \right.$$

- Vérifions que l'application θ est bien définie. Soit une involution $f \in \mathcal{I}(E)$. D'après le schéma suivant :
$$F \xrightarrow{\phi^{-1}} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\phi} F$$
l'application $\theta(f) : F \mapsto F$ est bien définie. Vérifions que $\theta(f)$ est une involution de F en calculant :
$$(\phi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ f \circ \phi^{-1}) = \phi \circ (f \circ f) \circ \phi^{-1} = \phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_F$$
- Vérifions que l'application θ est injective. Soient $(f,f') \in \mathcal{I}(E)^2$ telles que $\theta(f) = \theta(f')$. Puisque $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = \phi \circ f' \circ \phi^{-1}$, en composant à gauche par ϕ^{-1} et à droite par ϕ, on tire que $f = f'$.
- Vérifions que l'application θ est surjective. Soit une involution $g \in \mathcal{I}(F)$. Posons $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$. On a bien $f \circ f = \mathrm{id}_E$, donc $f \in \mathcal{I}(E)$ et on vérifie facilement que $\theta(f) = g$.

On a donc exhibé une bijection entre $\mathcal{I}(E)$ et $\mathcal{I}(F)$.

Q 14 Soit un ensemble E de cardinal 1 : $E = \{a\}$. La seule application de E vers E est id_E qui est involutive, donc $I_1 = 1$. Soit un ensemble E de cardinal 2 : $E = \{a,b\}$. Il y a deux applications bijectives de E, id_E et l'application τ telle que $\tau(a) = b$ et $\tau(b) = a$ qui sont des involutions. Par conséquent, $I_2 = 2$.

Q 15

- Soit $k \in [\![1,n]\!]$. En considérant l'application $f : [\![1,n]\!] \mapsto [\![1,n]\!]$ telle que $f(n) = k$, $f(k) = n$ et $\forall x \notin \{n,k\}$, $f(x) = x$, on montre que $\mathcal{I}_k \neq \emptyset$.

- Montrons que $\bigcup_{1\leq k\leq n} \mathcal{I}_k = \mathcal{I}([\![1,n]\!])$.
  - $\subset$: clair car $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}([\![1,n]\!])$.
  - $\supset$: soit une involution $f \in \mathcal{I}([\![1,n]\!])$. Posons $k = f(n)$, on a bien $f \in \mathcal{I}_k$.
- Montrons que les ensembles $\mathcal{I}_k$ sont disjoints. Soit $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $p \neq q$. Montrons que $\mathcal{I}_p \cap \mathcal{I}_q = \emptyset$. Par l'absurde, s'il existait $f \in \mathcal{I}_p \cap \mathcal{I}_q$, on aurait $f(n) = p$ et $f(n) = q$, et donc $p = q$.

$\boxed{Q\ 16}$

- Considérons l'application
$$\phi : \begin{cases} \mathcal{I}_n & \longrightarrow \quad \mathcal{I}([\![1,n-1]\!]) \\ f & \longmapsto \quad f_{|\ [\![1,n-1]\!]} \end{cases}$$
Cette application est bien définie. En effet, si $f \in \mathcal{I}_n$, on a $f(n) = n$ donc la restriction de cette application à $[\![1,n-1]\!]$ est une involution de $[\![1,n-1]\!]$. Il est facile de montrer que l'application ϕ est bijective.
- Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$ et $f \in \mathcal{I}_k$. Comme $f(n) = k$ et que f est une involution, on a $f(k) = f \circ f(n) = n$. Notons alors $F = [\![1,n]\!] \setminus \{k,n\}$. On vérifie que la restriction de f à F est une involution de F, ce qui permet de définir l'application
$$\phi : \begin{cases} \mathcal{I}_k & \longrightarrow \quad \mathcal{I}(F) \\ f & \longmapsto \quad f_{|F} \end{cases}$$
On vérifie alors que cette application ϕ est bijective. Puisque l'ensemble F est de cardinal $n-2$, $F \approx [\![1,n-2]\!]$, et d'après la question 13, on sait alors que $\mathcal{I}(F) \approx \mathcal{I}([\![1,n-2]\!])$.

$\boxed{Q\ 17}$ D'après la question 15 et le lemme des bergers,
$$I_n = \sum_{k=1}^{n} |\mathcal{I}_k|$$
Mais puisque d'après la question 16, $\mathcal{I}_n \approx \mathcal{I}([\![1,n-1]\!])$, on a $|\mathcal{I}_n| = I_{n-1}$. De même, pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, $|\mathcal{I}_k| = I_{n-2}$. Donc
$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

$\boxed{Q\ 18}$ a) En divisant la relation de récurrence vérifiée par I_n par $n!$, on obtient la relation annoncée.
b) Montrons par une récurrence forte que $\forall n \geq 1$, $u_n \leq 2/n$.
$$\mathcal{P}(n) : u_n \leq 2/n$$
$\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vérifiées puisque $u_1 = u_2 = 1$ et $u_3 = 2/3$ Montrons que $\mathcal{P}(1),\dots,\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. On majore
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\big(u_n + u_{n-1}\big) \\ &\leq \frac{1}{n+1}\big(\frac{2}{n} + \frac{2}{n-1}\big) \qquad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n-1) \\ &\leq \frac{2}{n+1}\frac{2}{n-1} \\ &\leq \frac{2}{n+1} \quad \text{pour } n \geq 3 \end{aligned}$$
Comme $\forall n \geq 1$, $|u_n| = u_n \leq 2/n$, par le théorème de majoration, on conclut que la suite (u_n) converge vers 0.

$\boxed{Q\ 19}$ Montrons ce résultat par récurrence sur n :
$$\mathcal{P}(n) : I_{2n} = \dots \text{ et } I_{2n+1} = \dots$$
$\mathcal{P}(1)$:
$$\sum_{k=0}^{1} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2}{k} = \frac{0!}{2^0 0!}\binom{2}{0} + \frac{2!}{2^1 1!}\binom{2}{2} = 1 + 1 = 2$$
et on a vu à la question 14 que $T_2 = 2$. De même,
$$\sum_{k=0}^{1} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{3}{k} = 1 + 3 = 4$$
Or d'après la relation de récurrence, $T_3 = T_2 + 2T_1 = 2 + 2 = 4$.

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: calculons

$$\begin{aligned}
I_{2n+2} &= I_{2n+1} + (2n+1)I_{2n-2} \quad \text{d'après la formule de récurrence} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2n+1}{2k} + (2n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2n}{2k} \qquad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2n+1}{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!}(2k+1)\binom{2n+1}{2k+1} \qquad \left(\text{ car } \binom{2n+1}{2k+1} = \frac{2n+1}{2k+1}\binom{2n}{2k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2n+1}{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!}\binom{2n+1}{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2n+1}{2k} + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(2p)!}{2^p p!}\binom{2n+1}{2p-1} \qquad \left(\text{ par le changement d'indice } p = k+1\right) \\
&= \binom{2n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!}\left[\binom{2n+1}{2k} + \binom{2n+1}{2k-1}\right] + \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}\binom{2n+1}{2n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2n+2}{2k} + \frac{[2(n+1)]!}{2^{n+1}(n+1)!}\binom{2n+2}{2(n+1)} \qquad \left(\text{ par la formule d'additivité}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2n+2}{2k}
\end{aligned}$$

On démontre que

$$I_{2n+3} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2n+3}{2k}$$

en utilisant les mêmes ingrédients.