MPSI 2 : MPSI2 – DL 04

pour le 15 janvier 2004

1 La formule de Taylor-Lagrange.

On considère une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

$\boxed{Q\ 1}$ Soit $x \in I$ et $h > 0$ fixés tels que $[x,x+h] \subset I$. On pose

$$\phi : \begin{cases} [0,h] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x+t) - f(x) - tf'(x) - \dfrac{t^2}{2}K \end{cases}$$

où K est une constante.
Justifier que ϕ est deux fois dérivable sur $]0,h[$ et calculer $\phi'(t)$ et $\phi''(t)$ pour $t \in]0,h[$.

$\boxed{Q\ 2}$ Déterminer la constante K pour que $\phi(0) = \phi(h)$ et en déduire qu'il existe $\theta \in]0,h[$ tel que $\phi''(\theta) = 0$.

$\boxed{Q\ 3}$ Montrer que $\forall x \in I$, $\forall h > 0$ tel que $[x,x+h] \subset I$, $\exists c \in]x,x+h[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(c)$$

2 Inégalités entre f,f',f''

$\boxed{Q\ 4}$ Donner un exemple de fonction f dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifiant :

$$f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et telle que $f(x)$ ne tende pas vers une limite finie en $+\infty$.

$\boxed{Q\ 5}$ On considère la fonction

$$g : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x^2}{x} \end{cases}$$

Montrer que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que $g'(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

On condidère dans cette partie, une fonction f deux fois dérivable sur $I =]0,+\infty[$, et telle que f, f', et f'' soient bornées sur I et telle que f'' n'est pas la fonction nulle.
On note désormais pour $A > 0$,

$$M_0(A) = \sup_{x\in]A,+\infty[} |f(x)|, \quad M_1(A) = \sup_{x\in]A,+\infty[} |f'(x)|, \quad M_2(A) = \sup_{x\in]A,+\infty[} |f''(x)|$$

$\boxed{Q\ 6}$ Soit $A > 0$ et $h > 0$. Montrer que

$$M_1(A) \leq \frac{2}{h}M_0(A) + \frac{h}{2}M_2(A)$$

$\boxed{Q\ 7}$ On définit

$$m : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \dfrac{2}{h}M_0(A) - M_1(A) + \dfrac{h}{2}M_2(A) \end{array} \right.$$

Montrer que m admet un minimum en un point h_0 que l'on déterminera.

$\boxed{Q\ 8}$ En déduire que

$$M_1(A) \leq 2\sqrt{M_0(A)M_2(A)}$$

$\boxed{Q\ 9}$ On suppose que

$$f''(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Montrer que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3 La méthode de Newton

On considère dans cette partie une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- (H1) $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$.
- (H2) $\forall x \in [a,b],\ f'(x) < 0$.
- (H3) f est convexe sur $[a,b]$.
- (H4) $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer qu'il existe un unique $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

$\boxed{Q\ 11}$ Soit $u \in [a,b]$.
a) Ecrire l'équation de la tangente T_u à la courbe représentative de f en u.
b) Soit α l'abscisse de l'intersection de T_u avec l'axe $(0x)$. Exprimer α en fonction de u.

On note

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right.$$

On définit la suite (x_n) en se donnant $x_0 \in [a,c[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

$\boxed{Q\ 12}$ Montrer que (x_n) est une suite croissante et majorée par c.

$\boxed{Q\ 13}$ Montrer que (x_n) converge vers c.

$\boxed{Q\ 14}$

En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall x \in [a,c], \quad |g(x) - c| \leq (x-c)^2 \frac{M}{2m}$$

$\boxed{Q\ 15}$ En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - c| \leq C \left(\frac{|x_0 - c|}{C} \right)^{2^n}$$

$\boxed{Q\ 16}$ Qu'en déduit-on sur la convergence de (x_n) vers c?

$\boxed{Q\ 17}$ En utilisant la méthode de Newton, si $A > 1$, trouver une suite (x_n) qui converge rapidement vers $\sqrt{A}$ telle que le calcul de (x_n) ne nécessite que des additions, multiplications et divisions.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ $t \mapsto f(x+t)$ est deux fois dérivable comme composée de f deux fois dérivable et $t \mapsto x+t$ deux fois dérivable.
D'autre part, $t \mapsto tf'(x) - \dfrac{t^2}{2}K$ est un polynôme en t donc deux fois dérivable. Donc $\phi \in \mathcal{D}^2(]0,h[)$.
Soit $t \in]0,h[$.

$$\phi'(t) = f'(x+t) + f'(x) - Kt$$
$$\phi''(t) = f''(x+t) - K$$

$\boxed{Q\ 2}$ Il suffit de poser

$$K = \frac{2}{h^2}\left(f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right)$$

Comme ϕ est continue sur $[0,h]$, dérivable sur $]0,h[$ et $\phi(0) = \phi(h)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]0,h[$ tel que $\phi'(c_1) = 0$.
Comme $\phi'(0) = \phi'(c_1) = 0$, que ϕ' est continue (car f dérivable sur $[x,x+h]$ donc continue sur cet intervalle) sur $[0,h]$ et que ϕ' est dérivable sur $]0,h[$, en appliquant à nouveau Rolle, $\exists \theta \in]0,c_1[$ tel que $\phi''(\theta) = 0$.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit $x \in I$ et $h > 0$ tels que $[x,x+h] \subset I$ fixés. On définit la fonction ϕ ci-dessus. On a montré qu'il existait $\theta \in]0,h[$ tel que $\phi''(\theta) = 0$.
Mais en posant alors $c = x + \theta$, on a $c \in]x,x+h[$. Alors, comme $\phi''(\theta) = 0$, $K = f''(\theta) = f''(x+c)$. Comme on a également $\phi(h) = 0$, il vient que

$$f(x+h) - f(x) + hf'(x) - \frac{t^2}{2}f''(c) = 0$$

d'où le résultat.

$\boxed{Q\ 4}$ Par exemple $x \mapsto \ln x$ ou alors $x \mapsto \sqrt{x}$.

$\boxed{Q\ 5}$ Majorons g en valeur absolue: soit $x > 0$:

$$|g(x)| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{x}$$

et comme $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par le théorème de majoration.

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = 2\sin x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

Montrons que g' n'a pas de limite en $+\infty$ en exhibant les deux suites suivantes:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \sqrt{n\pi}, \quad y_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Alors $x_n \to +\infty$ et $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Si par l'absurde, g' possèdait une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$, puisque $\dfrac{sinx^2}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{}$ 0 (en majorant en valeur absolue), on aurait que

$$f(x) = 2\sin x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$$

Mais d'après le théorème d'image d'une suite, on aurait $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et $f(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$ et $f(y_n) = 1$. Par conséquent, on devrait avoir $l = 1 = 0$ ce qui est impossible.

$\boxed{Q\ 6}$ Soit $x \geq A$ et $h > 0$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]x,x+h[$ tel que

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2}f''(c)\right)$$

Majorons en valeur absolue:

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{h}\left(|f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2}|f''(c)|\right)$$

Mais comme $x,x+h \geq A$, par définition de M_0 et M_2,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{h}\left(2M_0 + \frac{h^2}{2}M_2\right)$$

Le majorant trouvé étant indépendant de $x \in [A, +\infty[$, par passage à la borne supérieure, on obtient que

$$M_1 \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2$$

$\boxed{Q\ 7}$ En étudiant cette fonction de h sur $]0, +\infty[$, on trouve qu'elle admet un minimum en $h_0 = 2\sqrt{\dfrac{M_0(A)}{M_2(A)}}$.

$\boxed{Q\ 8}$ Comme on a montré que $\forall h > 0$, $m(h) \geq 0$, en particulier, on a $m(h_0) \geq 0$ ce qui donne $2\sqrt{M_0(A)M_2(A)} \geq M_1(A)$.

$\boxed{Q\ 9}$ Comme f est bornée sur $]0, +\infty[$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x > 0$, $|f(x)| \leq \alpha$ et alors $\forall A > 0$, $M_0(A) \leq \alpha$.
Montrons que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha}} > 0$. Comme $f''(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, il existe $B > 0$ tel que $\forall x \geq B$, $|f''(x)| \leq \varepsilon'$. Alors par passage à la borne sup, $M_2(B) \leq \varepsilon'$.
Soit alors $x \geq B$:

$$|f'(x)| \leq M_1(B) \leq 2\sqrt{\alpha M_2(B)} \leq 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\varepsilon'} \leq \varepsilon$$

$\boxed{Q\ 10}$ Puisque f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et que $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) < 0$, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection entre $[a,b]$ et $[f(b),f(a)]$. Comme $0 \in [f(b),f(a)]$, 0 possède un unique antécédent $c \in [a,b]$.

$\boxed{Q\ 11}$ a) La tangente à la courbe représentative de f en u a pour équation:

$$(T_u) : \quad y = f(u) + (x - u)f'(u)$$

b) La tangente coupe l'axe des x en α, et donc

$$0 = f(u) + (\alpha - u)f'(u) \Rightarrow \alpha = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$

$\boxed{Q\ 12}$ La fonction g est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$,

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

Mais puisque f est convexe sur $[a,c]$, $f'' \geq 0$ sur $[a,c]$. Donc, $\forall x \in [a,c]$, $g'(x) \geq 0$ et donc g est *croissante* sur $[a,c]$.
Montrons alors le résultat par récurrence.

$$\mathcal{P}(n) : a \leq x_n \leq c \text{ et } x_n \leq x_{n+1}$$

$\mathcal{P}(0)$: Comme $x_0 \in [a,c[$, on a bien la première propriété. Comme $x_1 - x_0 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, et que $f(x_0) > 0$ (puisque $x_0 \in [a,c[$, et $f'(x_0) < 0$, on a bien $x_0 \leq x_1$.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: d'après $\mathcal{P}(n)$, $a \leq x_n \leq c$ et comme g est croissante sur $[a,c]$, $g(a) \leq g(x_n) \leq g(c)$. Mais puisque $g(c) = c$, et $g(a) \geq a$, $a \leq x_{n+1} \leq c$.
On a alors, puisque $x_{n+1} \in [a,c]$, $f(x_{n+1}) \geq 0$ et donc

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})} \geq 0$$

$\boxed{Q\ 13}$ Comme (x_n) est croissante et majorée, elle converge vers $l \in \mathbb{R}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a,c]$, par passage à la limite dans les inégalités, on obtient que $l \in [a,c]$. Mais alors puisque $f'(l) < 0$, que f et f' sont continues au point l,

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{f(l)}{f'(l)}$$

Comme (x_{n+1}) converge aussi vers l, on obtient finalement

$$l = l - \frac{f(l)}{l}$$

donc $f(l) = 0$ et comme c est l'unique zéro de f sur le segment $[a,c]$, on a bien $l = c$.

$\boxed{Q\ 14}$ Soit $x \in [a,c]$. On calcule :

$$g(x) - c = \frac{xf'(x) - f(x) - cf'(x)}{f'(x)}$$

Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à f entre x et c : f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x,c]$ et donc il existe $\theta \in]x,c[$ tel que

$$f(c) = f(x) + (c-x)f'(x) + \frac{(c-x)^2}{2} f''(\theta)$$

Et comme $f(c) = 0$, on en déduit que

$$g(x) - c = \frac{(x-c)^2 f''(\theta)}{2f'(x)}$$

et en majorant en valeur absolue :

$$|g(x) - c| \le \frac{(x-c)^2 |f''(\theta)|}{2|f'(x)|}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,c]$, f'' est continue sur le segment $[a,c]$ donc y est bornée. Notons

$$M = \sup_{t \in [a,c]} |f''(t)|$$

Comme f' est continue sur le segment $[a,c]$, $|f'|$ aussi et donc $|f'|$ admet un minimum. Donc il existe $\alpha \in [a,c]$ tel que ce minimum m vérifie $m = |f'(\alpha)|$. Or par hypothèse, $f'(\alpha) < 0$, et par conséquent, on a $m > 0$. Puisque $|f''(\theta)| \le M$ et que $|f'(x)| \ge m$, on a donc

$$|g(x) - c| \le \frac{(x-c)^2 M}{2m}$$

$\boxed{Q\ 15}$ Montrons le résultat par récurrence, en posant

$$K = \frac{2m}{M}$$

$$\mathcal{P}(n) : |x_n - c| \le K \left(\frac{|x_0 - c|}{K} \right)^{2^n}$$

$\mathcal{P}(0)$ est vérifiée car $2^0 = 1$

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - c| &= |g(x_n) - c| \\
&\le \frac{M}{2m} |x_n - c|^2 \\
&\le \frac{M}{2m} K^2 \left(\frac{|x_0 - c|}{K} \right)^{2^{n+1}} \\
&\le K \left(\frac{|x_0 - c|}{K} \right)^{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 16}$ En notant $\varepsilon_n = |x_n - c|$ l'erreur commise en approximant c par x_n, la question 14 nous dit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_{n+1} \le \frac{1}{K} \varepsilon_n^2$$

et donc la convergence de (x_n) vers c est *quadratique* : A chaque itération de la suite (x_n), le nombre de décimales communes à x_n et c *double*.

$\boxed{Q\ 17}$ Posons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-A,-1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - A \end{array} \right.$$

Comme f est deux fois dérivable et $\forall x \in [-A,-1]$, $f''(x) = 2 \ge 0$, la fonction f est *convexe* sur $[-A,0]$.
De plus, $f(-A) = A^2 - A > 0$ et $f(-1) = 1 - A < 0$. Donc elle admet un unique zéro $c = -\sqrt{A}$ dans $[-A,-1]$.
De plus, $\forall x \in [-A,-1]$, $f'(x) = 2x \le -1 < 0$

La méthode de Newton appliquée à cette fonction donne la suite récurrente suivante : on prend $x_0 = -A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{A}{x_n}\right)$$

Cette suite ne nécessite que des multiplications, additions et divisions et converge quadratiquement vers $-\sqrt{A}$. La suite $(-x_n)$ converge donc très rapidement vers $\sqrt{A}$.