MPSI 2 : DL 03

pour le 12 décembre 2003

1 Problème 1

`L'objet du problème est de calculer explicitement la limite de la suite des moyennes arithmétiques-géométriques pour certaines valeurs initiales.`

On considère dans cet exercice un réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Q 1 On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \cos(x) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \cos\Big(\dfrac{x}{2^{n+1}}\Big) \end{cases}$$

a. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n \sin(\frac{x}{2^n})$ est géométrique.

b. En déduire pour tout entier n, l'expression de u_n en fonction de x et de n.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

On considère désormais les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{\cos x} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$$

Q 2

a. Donner l'expression de b_1 comme quotient de deux cosinus.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

Q 3

a. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\big(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\big)}\big(b_n - a_n\big) \tag{1}$$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n < b_n$.

c. En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n).

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}\Big(\frac{1}{\cos(x)} - 1\Big) \tag{2}$$

e. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont même limite, notée L.

Q 4

a. Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = \frac{u_n \cos(\frac{x}{2^n})}{\cos^2(x)} \text{ et } b_n = \frac{u_n}{\cos^2(x)} \tag{3}$$

b. En déduire la valeur de L.

$\boxed{Q\ 5}$ Dans cette question, on considère le cas particulier $x = \dfrac{\pi}{4}$.

a. Calculer la valeur de L.

b. En déduire un encadrement de π en utilisant a_n et b_n.

c. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{4}(b_n - a_n) \tag{4}$$

d. Combien suffit-il de calculer de termes des suites (a_n) et (b_n) pour obtenir un encadrement de π à 10^{-8} près? (On ne demande pas de calculer les valeurs de a_n et b_n correspondantes).

2 Problème 2

On considère une suite (u_n) de réels non nuls et on lui associe la suite (p_n) définie par

$$\forall n \geq 1,\, p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$$

On dit que le *produit* (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie *non nulle*. Sinon, on dira que le produit (p_n) diverge.

2.1 Quelques exemples

$\boxed{Q\ 6}$ Montrez si le produit (p_n) converge, alors la suite (u_n) est convergente et précisez sa limite.

$\boxed{Q\ 7}$ On suppose dans cette question uniquement que $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = (1 + \dfrac{1}{n})$. Calculer p_n pour $n \geq 1$ et en déduire la nature du produit (p_n).

$\boxed{Q\ 8}$ On considère un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z},\, a \neq k\pi$. On considère dans cette question uniquement la suite de terme général $u_n = \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$. Pour un entier $n \geq 1$, calculez le réel $p_n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)$. Montrez ensuite que le produit (p_n) converge et précisez la limite de la suite (p_n).

2.2 Une caractérisation de la convergence d'un produit

On considère dans cette partie une suite (u_n) qui converge vers 1.

$\boxed{Q\ 9}$ Montrez qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\, u_n > 0$.

On définit alors la suite (S_n) à partir du rang n_0 par

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} \ln(u_k)$$

$\boxed{Q\ 10}$ Montrez que la suite (S_n) converge si et seulement si le produit (p_n) converge.

$\boxed{Q\ 11}$ On considère dans cette question uniquement, la suite (u_n) de terme général $u_n = \sqrt[n]{n}$ et le produit (p_n) associé.

a) Montrez que $\forall p \geq 3,\, \int_p^{p+1} \dfrac{\ln x}{x}\, dx \leq \dfrac{\ln p}{p}$.

b) En déduire la nature du produit (p_n).

2.3 Un autre critère de convergence d'un produit

On considère maintenant une suite (ν_n) telle que $\forall n \geq 1$, $\nu_n > 0$ et le produit

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \nu_k)$$

On définit la suite (T_n) de terme général

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \nu_k$$

$\boxed{Q\ 12}$ Montrez que $\forall x > 0$, $\ln(1 + x) \leq x$.

$\boxed{Q\ 13}$ Montrez que si la suite (T_n) converge, alors le produit (p_n) converge également.

$\boxed{Q\ 14}$ Montrer la réciproque : si le produit (p_n) converge, alors la suite (T_n) converge également.

$\boxed{Q\ 15}$ On considère dans cette question la suite (T_n) de terme général

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

a) En utilisant la question 7, que peut-on dire de la limite de la suite (T_n) ?

b) En encadrant pour $k \geq 2$, l'intégrale $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$, trouvez un équivalent de la suite (T_n).

2.4 Étude d'un produit

On considère dans cette partie un réel $a > 0$ et le produit

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right)$$

$\boxed{Q\ 16}$ Si $a \geq 1$, que peut-on dire du produit (p_n) ?

On suppose désormais que $a \in]0,1[$.

$\boxed{Q\ 17}$ Montrez que le produit (p_n) converge.

$\boxed{Q\ 18}$ Soit un entier $n \geq 1$. Calculez $(1 - a^2)p_n$ et en déduire la limite de la suite (p_n).

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons
$$v_{n+1} = u_{n+1}\sin\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big) = u_n \cos\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big)\sin\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big)$$
Mais puisque $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$, il vient que
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \sin\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \frac{1}{2}v_n$$
Par conséquent, la suite (v_n) est géométrique de raison $1/2$ et donc $v_n = \frac{v_0}{2^n} = \frac{\sin x\cos x}{2^n} = \frac{\sin(2x)}{2^{n+1}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{v_n}{\sin\Big(\frac{x}{2^n}\Big)} = \boxed{\frac{\sin(2x)}{2^{n+1}\sin\Big(\frac{x}{2^n}\Big)}}$$
(Remarquons que puisque $0 < x < \pi/2$, tous les sinus et cosinus considérés sont non nuls)

c. Utilisons l'équivalent usuel du sinus. Comme $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sin\Big(\frac{x}{2^n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}$ $(x \neq 0)$. Par produit-quotient d'équivalents, on trouve alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(2x)}{2x}$. Par conséquent,
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin(2x)}{2x}}$$

$\boxed{Q\ 2}$

a. On calcule $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos x}$ puis
$$b_1 = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2\cos^2 x}}$$
Mais puisque $\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1$, il vient que $\cos x + 1 = 2\cos^2(x/2)$ et puisque les cosinus sont strictement positifs $(0 < x < \pi/2)$, on trouve finalement
$$b_1 = \sqrt{\frac{\cos^2(x/2)}{\cos^2 x}} = \boxed{\frac{\cos(x/2)}{\cos x}}$$

b. Par récurrence :
$$\mathcal{P}(n)\ :\ a_n > 0 \text{ et } b_n > 0$$
$\mathcal{P}(0)$ est vrai puisque $a_0 = 1 > 0$ et $b_0 = 1/\cos(x) > 0$ $(0 < x < \pi/2)$.

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: D'après $\mathcal{P}(n)$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$. Alors $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > 0$ et b_{n+1} est bien défini avec $b_{n+1} > 0$.

$\boxed{Q\ 3}$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les relations de récurrence et en utilisant les quantités conjuguées (les termes sont > 0) :
$$\begin{aligned}
b_{n+1} - a_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1}b_n} - a_{n+1}\\
&= \sqrt{a_{n+1}}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}})\\
&= \sqrt{a_{n+1}}\frac{b_n - a_{n+1}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}}\\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}}\Big(\frac{b_n - a_n}{2}\Big)
\end{aligned}$$

b. Par récurrence en utilisant a).

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons en utilisant b,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} > 0$$

En utilisant les quantités conjuguées,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b_n(a_{n+1} - b_n)}{\sqrt{a_{n+1}b_n} + b_n} = \frac{b_n(a_n - b_n)}{2(\sqrt{a_{n+1}b_n} + b_n)} < 0$$

Donc $(a_n) \nearrow$ et $(b_n) \searrow$.

d. On a déjà montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n > 0$ à la question 3b. Montrons l'autre inégalité par récurrence :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}\Big(\frac{1}{\cos(x)} - 1\Big)$$

$\mathcal{P}(0)$: $b_0 - a_0 = \dfrac{1}{\cos x} - 1 = \dfrac{1}{2^0}\Big(\dfrac{1}{\cos x} - 1\Big)$.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: En utilisant la formule (1),

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n) \leq \frac{b_n - a_n}{2} \underset{\mathcal{P}(n)}{\leq} \frac{1}{2^{n+1}}\Big(\frac{1}{\cos x} - 1\Big)$$

(On a utilisé la majoration $\sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}$).

e. Notons $(d_n) = (b_n - a_n)$. La suite géométrique $(1/2^n)$ converge vers 0. D'après la question 3d et le théorème des gendarmes, la suite (d_n) converge vers 0. Comme la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante, les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. On sait alors qu'elles convergent vers la même limite.

$\boxed{Q\ 4}$

a. Par récurrence :

$$\mathcal{P}(n) a_n = \frac{u_n \cos(x/2^n)}{\cos^2 x} \text{ et } b_n = \frac{u_n}{\cos^2 x}$$

$\mathcal{P}(0)$: Calculons

$$\frac{u_0}{\cos(x/2^0)} = \frac{u_0}{\cos x} = 1 = a_0$$

$$\frac{u_0}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = b_0$$

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ Calculons, en utilisant la formule $1 + \cos\alpha = 2\cos^2(\alpha/2)$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{u_n}{2\cos^2 x}\big[\cos(x/2^n) + 1\big] = \frac{u_{n+1}}{\cos^2 x}\cos(x/2^{n+1})$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} = \sqrt{\frac{u_{n+1}\cos(x/2^{n+1})u_n}{\cos^4 x}} = \sqrt{\frac{u_{n+1}^2}{\cos^4 x}} = \frac{u_{n+1}}{\cos^2 x}$$

b. Nous avons vu à la question 1c, que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{\sin x \cos x}{x}$. Par conséquent,

$$b_n = \frac{u_n}{\cos^2 x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\tan x}{x}$$

et par unicité de la limite, on trouve que $\boxed{L = \dfrac{\tan x}{x}}$.

$\boxed{Q\ 5}$

a. Ici, $\boxed{L = \dfrac{4}{\pi}}$.

b. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq L \leq b_n$, il vient que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{4}{b_n} \leq \pi \leq \dfrac{4}{a_n}$.

c. On a déjà vu que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < b_n - a_n$. Montrons l'autre inégalité en utilisant la formule (1). Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $a_n \le a_{n+1} \le b_n \le b_{n+1}$, il vient que

$$\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \le \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_{n+1}})} = \frac{1}{4}$$

et donc $0 < b_{n+1} - a_{n+1} \le \dfrac{b_n - a_n}{4}$. Par récurrence, on montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(b_n - a_n) \le \frac{b_0 - a_0}{4^n} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^n}$$

d. L'encadrement de π précédent sera à la précision ε lorsque $\dfrac{4}{a_n} - \dfrac{4}{b_n} \le \varepsilon$, c'est à dire $\dfrac{4(b_n - a_n)}{a_n b_n} \le \varepsilon$. Mais puisque $a_0 \le a_n \le b_n$, il vient que $\dfrac{1}{a_n b_n} \le \dfrac{1}{a_0^2}$ et donc d'après Q5c,

$$\frac{4}{a_n} - \frac{4}{b_n} \le 4(b_n - a_n) \le \frac{b_0 - a_0}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}}$$

Pour avoir un encadrement à 10^{-8} près, il suffit que $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} \le 10^{-8}$, et donc il suffit que $4^{n-1} \ge 10^8(\sqrt{2} - 1)$, c'est à dire $(n - 1)\log(4) \le 8 + \log(\sqrt{2} - 1)$. Avec la calculatrice, on touve qu'il suffit de prendre $n = 14$.

Q 6 On suppose que la suite (p_n) converge vers une limite non-nulle l. Soit $n \ge 1$. On écrit pour $n \ge 1$,

$$u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

Donc la suite (u_n) converge vers $l/l = 1$ d'après les théorèmes généraux. (Attention, la suite (p_{n-1}) n'est pas extraite de (p_n), mais converge vers l comme on le voit immédiatement à partir de la définition de la limite).

Q 7 Soit $n \ge 1$. On calcule en réduisant au même dénominateur

$$p_n = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\dots\frac{n+1}{n} = n + 1$$

Par conséquent, la suite (p_n) diverge vers $+\infty$ et le produit (p_n) diverge.

Q 8 Soit $n \ge 1$. En notant $v_n = p_n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)$, on calcule :

$$v_n = \cos\left(\frac{a}{2}\right)\dots\cos\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

En utilisant la formule $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ avec $\alpha = \frac{a}{2^n}$, on trouve que

$$v_n = \frac{1}{2} v_{n-1}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $(1/2)$ et donc $v_n = \dfrac{v_1}{2^{n-1}}$.

Mais puisque $v_1 = \cos(a/2)\sin(a/2) = \sin(a)/2$, on en tire que $v_n = \dfrac{\sin(a)}{2^n}$, et donc que

$$p_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

(car $a/2^n$ est différent de $k\pi$ par hypothèse). En utilisant l'équivalent classique du sinus, puisque $a/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$$u_n \sim \frac{\sin(a)}{2^n \frac{a}{2^n}} = \frac{\sin(a)}{a}$$

Donc la suite (p_n) converge vers $\dfrac{\sin(a)}{a} \ne 0$ et le produit (p_n) converge vers cette limite non nulle.

Q 9 Il suffit de poser $k = 1/2 < 1$, et d'utiliser un théorème du cours.

$\boxed{Q\ 10}$ Soit $n \geq n_0$. En utilisant la propriété fonctionnelle du logarithme, on peut écrire

$$S_n = \ln\bigl(u_{n_0} \dots u_n\bigr) \tag{5}$$

- $(i) \Rightarrow (ii)$: on suppose que la suite (S_n) converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$. En prenant l'exponentielle de la relation 5, on trouve que $\exp(S_n) = \dfrac{p_n}{p_{n_0-1}}$ et donc que $p_n = p_{n_0-1}\exp(S_n)$. La suite (S_n) converge donc vers $p_{n_0-1}\exp(l)$ car la fonction exp est continue au point l. Comme on a supposé que dans tout le problème, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, $p_{n_0-1} \neq 0$ et donc comme cette limite est non nulle, le produit (p_n) converge.
- $(ii) \Rightarrow (i)$: supposons que la suite (p_n) converge vers une limite non-nulle $l \in \mathbb{R}$. Alors la suite de terme général $\alpha_n = u_{n_0} \dots u_n = \dfrac{p_n}{p_{n_0-1}}$ converge vers $l' = \dfrac{l}{p_{n_0-1}}$. Mais puisque $p_{n_0-1} > 0$ et $l > 0$, $l' \geq 0$. Comme $p_{n_0-1} \neq 0$, il vient que $l' > 0$. Donc la suite $\bigl(\exp(S_n)\bigr)$ converge vers $l' > 0$ et donc la suite (S_n) converge vers $\ln(l')$ (car la fonction ln est continue au point l').

$\boxed{Q\ 11}$ a) Considérons la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ (dresser le tableau de variations !). Lorsque $x \geq e$, $f'(x) \leq 0$ et donc la fonction f est décroissante sur $[3, +\infty[$. Soit alors un entier $k \geq 3$. En majorant l'intégrale (faire un dessin !), on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln k}{k}$$

b) Soit $n \geq 1$. Écrivons $u_n = e^{\frac{1}{n}\ln n}$ Comme $\ln n = o(n)$, il vient que $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question 10 avec $n_0 = 1$. Soit $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ln k \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\ln k \\
&\geq \frac{1}{2}\ln 2 + \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 + \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 + \Bigl[\frac{(\ln x)^2}{2}\Bigr]_3^{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \frac{\bigl(\ln(n+1)\bigr)^2}{2}
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la minoration de a). Comme la suite $\bigl((\ln(n+1))^2/2\bigr)$ diverge vers $+\infty$, on en déduit par le théorème des gendarmes que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$ et donc que le produit (p_n) diverge.

$\boxed{Q\ 12}$ Considérons la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) - x \end{array} \right.$$

Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{-x}{1+x} < 0$. Par conséquent, la fonction g est décroissante sur $]0, +\infty[$ (dresser le tableau de variations !) et donc si $x > 0$, $g(x) \leq g(0) = 0$ ce qui montre l'inégalité demandée.

$\boxed{Q\ 13}$ Remarquons que la suite (p_n) est croissante : soit $n \geq 1$, $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + \nu_{n+1} \geq 1$.
Comme la suite (T_n) converge, elle est bornée. Donc il existe $M > 0$ tel que $\forall n \geq 1$, $T_n \leq M$. Soit alors $n \geq 1$. Majorons p_n :

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \nu_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \nu_k \leq M$$

Par conséquent, $p_n \leq e^M$.
La suite (p_n) étant croissante et majorée, elle converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$. Or $p_1 \geq 1$, donc par passage à la limite dans les inégalités, puisque $\forall n \geq 1$, $p_n \geq p_1$, on obtient que $l \geq 1$. Cette limite étant non nulle, on en déduit que le produit (p_n) converge.

$\boxed{Q\ 14}$ En développant pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} p_n &= (1+\nu_1)\dots(1+\nu_n) \\ &= 1+\nu_1+\dots+\nu_n+\nu_1\nu_2+\dots+\nu_{n-1}\nu_n+\dots\dots+\nu_1\dots\nu_n \\ &\geq \nu_1+\dots+\nu_n \end{aligned}$$

on en déduit que $\forall n \geq 1$, $T_n \leq p_n$. Par conséquent, si (p_n) converge, la suite (T_n) est majorée. Comme elle est croissante, elle converge également.

$\boxed{Q\ 15}$ a) Montrons par l'absurde que la suite (T_n) est divergente. Si elle convergeait, d'après la question 13, le produit $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+1/k)$ convergerait aussi, ce qui est faux d'après la question 7. Comme d'autre part la suite (T_n) est croissante et diverge, d'après le théorème de la limite monotone, elle diverge vers $+\infty$.
b) Soit $k \geq 2$. Comme la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, on encadre (faire un dessin !)

$$\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$$

ce qui donne l'encadrement suivant :

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}$$

On en déduit l'encadrement suivant de T_n pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1}\frac{dx}{x} &\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ \sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p} \leq \ln(n+1) &\leq T_n \\ T_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) &\leq T_n \\ \ln(n+1) \leq T_n &\leq \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

En divisant ces inégalités par $\ln(n+1)$, on trouve l'encadrement suivant de T_n :

$$1 \leq \frac{T_n}{\ln(n+1)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Par le théorème des gendarmes, $\dfrac{T_n}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et donc $T_n \sim \ln(n+1)$. Mais $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1+1/n) \sim \ln n$. et donc finalement, $T_n \sim \ln n$.

$\boxed{Q\ 16}$ Lorsque $a > 1$, la suite (u_n) associée au produit vérifie $\forall n \geq 1$, $u_n = 1 + a^{2^n}$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Comme la suite (u_n) ne converge pas vers 1, d'après la question 6, le produit (p_n) diverge.
Lorsque $a = 1$, la suite (u_n) converge vers $2 \neq 1$, et là aussi, le produit (p_n) diverge. (On aurait pu également minorer simplement p_n par 2^n).

$\boxed{Q\ 17}$ Considérons la suite (T_n) de la question 13 définie ici par

$$\forall n \geq 1,\ T_n = \sum_{k=1}^{n} a^{2^k}$$

Il est clair que cette suite (T_n) est croissante. Comme l'intervalle d'entiers $[1,2^n]$ contient tous les entiers 2^k pour $k \in [1,n]$ et que tous les réels a^k sont positifs, on majore facilement la suite (T_n) par une série géométrique :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} a^{2^k} \leq \sum_{p=1}^{2^n} a^p = \frac{1-a^{2^n+1}}{1-a^2} \leq \frac{1}{1-a}$$

Par conséquent, la suite (T_n) est croissante et majorée, et d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. D'après la question 13, le produit (p_n) converge.

$\boxed{Q\ 18}$ Soit $n \geq 1$. Calculons

$$\begin{aligned}(1-a^2)p_n &= (1-a^2)(1+a^2)(1+a^{2^2})\dots(1+a^{2^n})\\ &= (1-a^{2^2})(1+a^{2^2})\dots(1+a^{2^n})\\ &= \dots\\ &= (1-a^{2^n})(1+a^{2^n})\\ &= 1-a^{2^{n+1}}\end{aligned}$$

On démontre par récurrence que $\forall n \geq 1$,

$$(1-a^2)p_n = 1-a^{2^{n+1}}$$

Il vient alors que $\forall n \geq 1$,

$$p_n = \frac{1-a^{2^n+1}}{1-a^2}$$

et comme $a^{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1-a^2}$.