MPSI 2 : DL 02

pour le 20 novembre 2003

1 Problème 1

On considère la parabole $\mathcal{P}$ paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) &= t \end{cases}$$

et un point $A\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}.$

$\boxed{Q\ 1}$ On considère un point $M(t)$ de la parabole

a. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente $T_{M(t)}$ à la parabole au point $M(t)$ et l'équation cartésienne de la normale $\mathcal{N}_{M(t)}$ en $M(t)$.

b. Calculer les coordonnées $H(t)\begin{vmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{vmatrix}$ du projeté orthogonal de A sur $T_{M(t)}$.

Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le point $H(t)$ décrit une courbe Γ appelée *podaire* de $\mathcal{P}$ pour le point A.

$\boxed{Q\ 2}$

a. Calculer $X'(t)$ et $Y'(t)$.

b. Discuter en fonction de a et b le signe de $X'(t)$.

$\boxed{Q\ 3}$ Étudier les branches infinies de Γ ainsi que la position de Γ par rapport à l'asymptote éventuelle.

$\boxed{Q\ 4}$ Dans cette question, on suppose que $A\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$. Tracer la courbe Γ et la parabole $\mathcal{P}$ sur la même figure.

$\boxed{Q\ 5}$ Dans cette question, on suppose que $A\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}.$

a. Déterminer les intersections de Γ et $\mathcal{P}$.

b. Tracer sur une même figure les courbes Γ et $\mathcal{P}$.

$\boxed{Q\ 6}$ On suppose dans cette question que $b^2 - 2a > 0$.

a. Que signifie géométriquement cette condition ?

b. Montrer que par le point A passent deux tangentes à la parabole.

c. En déduire que A est un point double de la courbe Γ.

$\boxed{Q\ 7}$ Dans cette question, on suppose que $A\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$

a. Montrer qu'il existe un unique point M de la parabole tel que la normale en ce point passe par A (on ne cherchera pas à calculer les coordonnées de M).

b. Que peut-on en déduire sur la courbe Γ ?

c. Étudier la courbe paramétrée Γ (on calculera des valeurs exactes dans le tableau de variations, simplifiées sous la forme $\dfrac{a + b\sqrt{5}}{c}$ où a, b et c sont entiers). Représenter sur une même figure la parabole et Γ.

2 Problème 2

On considère le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Soit (γ) l'hyperbole équilatére d'équation cartésienne : $xy = 1$.

$\boxed{Q\ 8}$ On considère trois points A,B,C de (γ), deux à deux distincts, dont les abcisses sont notées a,b,c respectivement.

a. Déterminer les coordonnées (α,β) du centre de gravité G du triangle A,B,C.

b. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle A,B,C. Vérifier que H est sur (γ).

$\boxed{Q\ 9}$ On suppose dans cette question que le triangle ABC est un triangle équilatéral.

a. Que peut on dire de G et H ?

b. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que a,b,c sont les racines du polynôme

$$P(X) = X^3 - 3\lambda X^2 - 3\frac{1}{\lambda^2}X + \frac{1}{\lambda}$$

c. On appelle sommets de (γ) les points d'intersection de (γ) avec la droite d'équation : $y = x$. On suppose que H n'est pas l'un des sommets de (γ). Montrer que l'intersection du cercle circonscrit au triangle ABC avec (γ) contient un point de D distinct de A,B et C. Préciser les coordonnées de D.

$\boxed{Q\ 10}$ Soit r un réel non nul et $Q(X)$le polynôme défini par :

$$Q(X) = X^3 - 3rX^2 - 3\frac{1}{r^2}X + \frac{1}{r}$$

a. Déterminer le signe du produit $Q(0)Q(r)$. En déduire que $Q(X)$ admet trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles notées r_1,r_2,r_3.

b. Soient R_1,R_2,R_3 les points de (γ) d'abcisses respectives r_1,r_2,r_3. Montrer que l'orthocentre et le centre de gravité de de $R_1R_2R_3$ sont confondus. Que peut on dire du triangle $R_1R_2R_3$?

$\boxed{Q\ 11}$ En vous inspirant des questions précédentes, donner une méthode pour construire un triangle équilatéral dont les sommets sont sur (γ). On ne demande pas de justifications.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$

a. Le vecteur $\overrightarrow{F'(t)}\begin{vmatrix} t \\ 1 \end{vmatrix}$ dirige la tangente ; un point $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ est sur la tangente si et seulement si $\mathrm{Det}(\overrightarrow{M(t)M},\overrightarrow{F'(t)}) = 0$, ce qui donne comme équation cartésienne :

$$\boxed{T_{M(t)} :\ x - ty + \frac{t^2}{2} = 0}$$

et pour la normale :

$$\boxed{\mathcal{N}_{M(t)} :\ tx + y - \frac{t^3}{2} - t = 0}$$

b. Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} -1 \\ t \end{vmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{F'(t)}$ et dirige donc la normale en $M(t)$. En écrivant $H(t) = A + \lambda\overrightarrow{n}$, puisque $H(t) \in T_{M(t)}$, on trouve que $\lambda = \dfrac{a - tb + t^2/2}{t^2+1}$ et ensuite

$$\boxed{\begin{cases} X(t) &= \dfrac{(2a-1)t^2 + 2bt}{2(t^2+1)} \\ Y(t) &= \dfrac{t^3 + 2at + 2b}{2(t^2+1)} \end{cases}}$$

$\boxed{Q\ 2}$

a. On trouve que

$$\begin{cases} X'(t) &= \dfrac{-bt^2 + (2a-1)t + b}{(t^2+1)^2} \\ Y'(t) &= \dfrac{t^4 + (3-2a)t^2 - 4bt + 2a}{2(t^2+1)^2} \end{cases}$$

b.
- Si $b = 0$ et $a = 1/2$, $X'(t) = 0$, $X(t) = 0$ est constant.
- Si $b = 0$ et $a \neq 1/2$, $X'(t)$ s'annule et change de signe en 0.
- Si $b \neq 0$, le signe de $X'(t)$ est le même que celui du trinôme au numérateur. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (2a-1)^2 + 4b^2 > 0$ et le trinôme possède deux racines

$$\begin{cases} t_1 &= \dfrac{(2a-1) - \sqrt{(2a-1)^2 + 4b^2}}{2b} < 0 \\ t_2 &= \dfrac{(2a-1) + \sqrt{(2a-1)^2 + 4b^2}}{2b} > 0 \end{cases}$$

(le produit de ces deux racines vaut $t_1t_2 = -1$). $X'(t)$ est du signe de b à l'intérieur des racines et du signe opposé à l'extérieur.

$\boxed{Q\ 3}$ La seule branche infinie est $t \to \pm\infty$, et $X(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} a - 1/2$, $Y(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \pm\infty$. Par conséquent, la droite d'équation $\boxed{X = a - 1/2}$ est asymptote à Γ. On calcule $X(t) - \big(a - 1/2\big) = \dfrac{2bt - (2a-1)}{2(1+t^2)}$. La position de Γ par rapport à l'asymptote s'en déduit selon le signe de b ou celui de $2a-1$ lorsque $b = 0$.

$\boxed{Q\ 4}$ En reprenant les calculs généraux ci-dessus,

$$\begin{cases} X(t) &= \dfrac{-t^2}{2(t^2+1)} \\ Y(t) &= \dfrac{t^3}{2(t^2+1)} \end{cases} \quad \begin{cases} X'(t) &= \dfrac{-t}{(t^2+1)^2} \\ Y'(t) &= \dfrac{t^2(t^2+3)}{2(t^2+1)^2} \end{cases}$$

Comme $H(-t)$ est le symétrique de $H(t)$ par rapport à (Ox), il suffit d'étudier la courbe pour $t \in [0, +\infty[$.

t	0		$+\infty$
$X'(t)$	0	$-$	
$Y'(t)$	0	$+$	
$X(t)$	0	$\searrow$	$-1/2$
$Y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Au point stationnaire $A = M(0)$, puisque

$$m(t) = \frac{Y(t) - 0}{X(t) - 0} = -t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

il y a une tangente horizontale. C'est un point de rebroussement. Il y a une asymptote verticale d'équation $x = -1/2$ comme vu précédemment.

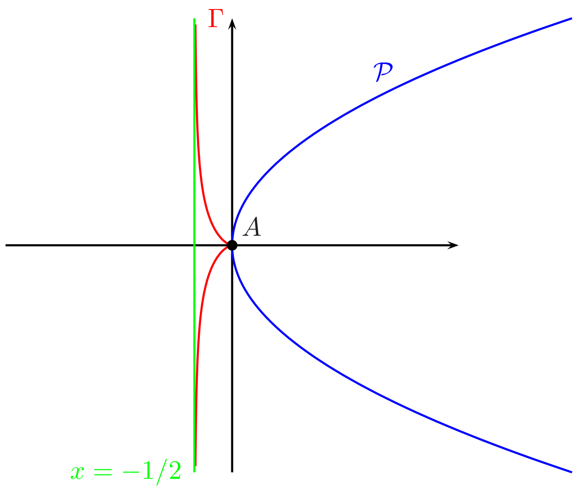

Fig. 1 – $a = b = 0$

$\boxed{Q\ 5}$

a. D'après les calculs précédents,

$$\begin{cases} X(t) &= \dfrac{5t^2}{2(t^2+1)} \\ Y(t) &= \dfrac{t(t^2+6)}{2(t^2+1)} \end{cases}$$

L'équation de la parabole étant $x = y^2/2$, le point $H(t)$ est sur $\mathcal{P}$ si et seulement si $2X(t) = Y^2(t)$, c'est à dire après calculs :

$$t^2(t^2-4)^2 = 0$$

les points d'intersection sont donc $M(0)\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$, $M(2)\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right.$ et $M(-2)\left|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right.$.

c. Puisque $H(-t)$ est le symétrique de $H(t)$ par rapport à (Ox), il suffit de faire l'étude sur $[0, +\infty[$. On reprend les calculs généraux et ici :

$$\begin{cases} X'(t) &= \dfrac{5t}{(t^2+1)^2} \\ Y'(t) &= \dfrac{t^4 - 3t^2 + 6}{2(t^2+1)^2} > 0 \end{cases}$$

d'où le tableau de variations :

t	0	$+\infty$
$X'(t)$	0 $+$	
$Y'(t)$	$+$	
$X(t)$	0 $\nearrow$	$5/2$
$Y(t)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

La droite verticale d'équation $x = 5/2$ est asymptote.

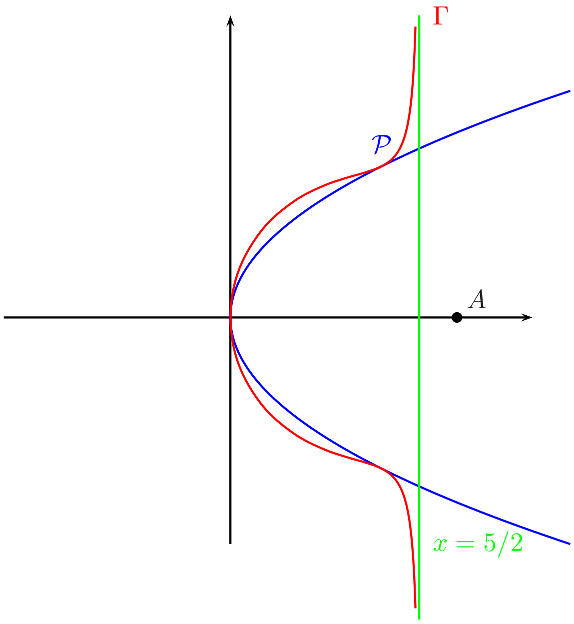

FIG. 2 – $a = 3$, $b = 0$

$\boxed{Q\ 6}$

a. Cette condition signifie que le point A est « extérieur » à la parabole.

b. Considérons un point $M(t)$ de la parabole. La tangente issue de $M(t)$ passe par A si et seulement si $t^2 - 2bt + 2a = 0$ (on a calculé en 1 l'équation cartésienne de $T_{M(t)}$). Puisque $\Delta' = b^2 - 2a > 0$, ce trinôme possède deux racines réelles t_1 et t_2 qui correspondent à deux points distincts $M(t_1)$, $M(t_2)$ en lesquels les tangentes passent par A.

c. Puisque par définition $H(t_1)$ est le projeté orthogonal de A sur la normale en $M(t_1)$, on a $H(t_1) = A$ et de même, $H(t_2) = A$ ce qui montre que A est un point double de Γ.

$\boxed{Q\ 7}$

a. Soit $M(t)$ un point de la parabole. On a déjà calculé l'équation cartésienne de la normale $\mathcal{N}_{M(t)}$. Le point A est sur cette normale si et seulement si $P(t) = t^3 + 2t - 2 = 0$. On étudie les variations de P : $P'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ et on en déduit que P ne s'annule qu'une seule fois en t_0 d'où le résultat.

b. Au point $M(t_0)$, le projeté de A sur la tangente à $\mathcal{P}$ est le point $M(t_0)$ lui-même, ce qui montre que $H(t_0) = M(t_0)$ et c'est le seul point d'intersection des courbes Γ et $\mathcal{P}$.

c. En reprenant les calculs précédents,

$$\begin{cases} X(t) &= \dfrac{-t^2 + 2t}{2(t^2+1)} \\ Y(t) &= \dfrac{t^3 + 2}{2(t^2+1)} \end{cases} \quad \begin{cases} X'(t) &= -\dfrac{t^2 + t - 1}{(t^2+1)^2} \\ Y'(t) &= \dfrac{t(t-1)(t^2+t+4)}{2(t^2+1)^2} \end{cases}$$

X' s'annule en $t_1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et en $t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puisque $t_1^2 = 1 - t_1$, on calcule $t_1^2 + 1 = 2 - t_1 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ et $-t_1^2 + 2t_1 = 3t_1 - 1 = -\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}$ d'où $X(t_1) = -\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2(5+\sqrt{5})} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = -\dfrac{1}{8}(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-1) =$

$-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4} \approx -0.8$. De même, $t_1^3 + 2 = 2t_1 + 1 = -\sqrt{5}$ d'où $Y(t_1) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}+1} = -\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \approx -0.3$. De même pour les calculs de $X(t_2)$ et $Y(t_2)$.

t	$-\infty$		t_1		0		t_2		1		$+\infty$
$X'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$Y'(t)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$X(t)$	$-1/2$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\searrow$	$1/4$	$\searrow$	$-1/2$
$Y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\searrow$	$3/4$	$\nearrow$	$+\infty$

L'étude de la branche infinie a été faite en général. Ici, la droite verticale d'équation $X = -1/2$ est asymptote. On a vu également que A était un point double de Γ.

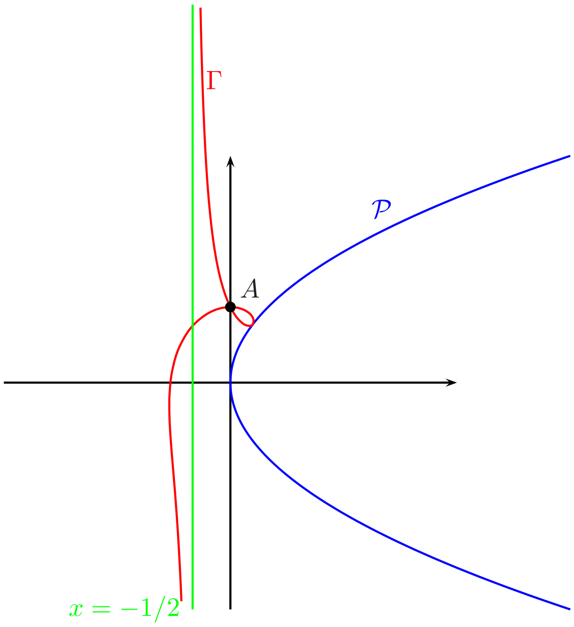

Fig. 3 – $a = 0,\ b = 1$

$\boxed{Q\ 8}$

a. On obtient directement $\alpha = \dfrac{a+b+c}{3}$ et $\beta = \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c})$ à partir de

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \quad \text{ou} \quad G = \frac{1}{3}(A+B+C)$$

b. Pour simplifier les calculs, posons $d = -\dfrac{1}{abc}$. Intéressons nous au point M de coordonnées $(d, -\dfrac{1}{d})$ et calculons le produit scalaire $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC}$. On obtient

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = (d-b)(c-a) + (\frac{1}{d} - \frac{1}{b})(\frac{1}{c} - \frac{1}{a})) = (c-a)(d-b)(1 + \frac{1}{abcd}) = 0$$

En utilisant un calcul analogue, on obtient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$, le point M d'abcisse d étant sur deux des hauteurs de ABC, c'est l'orthocentre de ABC.

$\boxed{Q\ 9}$

a. Lorsque l'on a affaire à un triangle équilatéral, les hauteurs,les médianes et les médiatrices sont confondues. Dans ce cas les points de concours des médianes, des hauteurs et des médiatrices sont confondus, donc $G = H$.

b. Nous savons donc que $G = H$, ceci se traduit par des relations sur les cooordonnées :

$$\frac{a+b+c}{3} = -\frac{1}{abc} \qquad \frac{1}{3}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = -abc$$

En posant par exemple $\lambda = \dfrac{a+b+c}{3}$, les relations précédentes montrent que a,b,c vérifient les relations :

$$a+b+c = 3\lambda \qquad abc = -\frac{1}{\lambda} \qquad ab+bc+ca = abc(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = -3(abc)^2 = -3\frac{1}{\lambda^2}$$

a,b,c sont donc les racines du polynôme

$$P(X) = X^3 - 3\lambda X^2 - 3\frac{1}{\lambda^2}X + \frac{1}{\lambda}$$

c. Pour simplifier les notations, nous garderons $\lambda = -\dfrac{1}{abc} = \dfrac{1}{3}(a+b+c)$. Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC équilatéral a pour centre le point $G(\lambda,\dfrac{1}{\lambda})$. L'équation cartésienne de ce cercle est :

$$(X-\lambda)^2 + (Y-\frac{1}{\lambda})^2 = (a-\lambda)^2 + (\frac{1}{a}-\frac{1}{\lambda})^2$$

L'intersection de (γ) et de ce cercle se ramène à la recherche des réels x non nuls tels que :

$$(x-\lambda)^2 + (\frac{1}{x}-\frac{1}{\lambda})^2 = (a-\lambda)^2 + (\frac{1}{a}-\frac{1}{\lambda})^2$$

Ce qui correspond à x racine non nulle du polynôme

$$H(X) = X^2(X-\lambda)^2 + (\frac{1}{\lambda^2}(X-\lambda)^2 + ((a-\lambda)^2 + (\frac{1}{a}-\frac{1}{\lambda})^2)X^2$$

Ce polynôme est de degré 4 et admet au moins trois racines réelles distinctes a,b et c car les points A,B et C sont à la fois sur l'hyperbole et le cercle. On peut donc factoriser ce polynôme par $(X-a)(X-b)(X-c)$, on a $H(X) = (X-a)(X-b)(X-c)(X-x_0)$ et sa quatrième racine x_0 vérifie :

$$a+b+c+x_0 = 2\lambda \quad \text{et} \quad abcx_0 = 1$$

En examinant le coefficient de X^3 ou le terme constant. Il vient $x_0 = -\lambda = \dfrac{1}{abc}$. Remarquons que $x \neq 0$. Observons pour la suite que le point $D(x_0,\dfrac{1}{x_0})$ est le symétrique de $H(\lambda,\dfrac{1}{\lambda})$ par rapport à l'origine. Il reste à prouver que ce point D est distinct des points A,B et C. Nous savons que a,b,c sont des racines du polynôme P, un petit calcul permet d'obtenir

$$P(-\lambda) = -2\lambda^3 + 2\frac{1}{\lambda} = \frac{-2}{\lambda}(\lambda^4 - 1)$$

donc, lorsque $\lambda^2 \neq 1$(ce qui est le cas lorsque G n'est pas un sommet de l'hyperbole), le point D est distinct de A,B et C.

$\boxed{Q\ 10}$

a. Pour r réel non nul, un calcul direct nous amène à :

$$Q(0)Q(r) = \frac{1}{r}(r^3 - 3r^3 - 3\frac{1}{r} + \frac{1}{r}) = \frac{1}{r^2}(-2r^4 - 2)$$

Dans un premier temps, supposons $r > 0$. Comme Q est une fonction continue sur $[0,r]$, que $Q(0) > 0$ et $Q(r) < 0$, il existe un réel $r_2 \in]0,r[$ tel que $Q(r_2) = 0$, D'autre part comme $lim_{+\infty} Q = +\infty$, il existe un réel $s > r$ tel que $Q(s) > 0$, en appliquant toujours le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction Q sur $[r,s]$, nous prouvons l'existence d'un réel $r_1 \in]r,s[$ tel que $Q(r_3) = 0$. Il suffit de réiterer le même raisonnement en utilisant $lim_{-\infty} Q = -\infty$ pour obtenir l'existence d'un réel $r_1 < 0$ vérifiant $Q(r_1) = 0$. Nous venons de montrer que le polynôme Q admet trois racines réelles distinctes et non nulles. Lorsque $r < 0$, on raisonne à l'identique sur $]-\infty,r[,]r,0[,]0,+\infty[$.

b. Désignons donc par R_1,R_2 et R_3 les points de (γ) d'abcisses respectives r_1,r_2 et r_3 les calculs effectués lors de la question 8 ont permis d'établir que les coordonnées du centre de gravité G' de R_1,R_2,R_3 sont données par la formule :

$$(x_{G'},y_{G'}) = (\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3),\frac{1}{3}(\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}{r_1r_2r_3})$$

et celles de l'orthocentre H' de $R_1R_2R_3$ sont données par :

$$(x_{H'},y_{H'}) = (-\frac{1}{r_1r_2r_3},-r_1r_2r_3)$$

Or r_1,r_2,r_3 sont les racines du polynôme Q donc

$$r_1+r_2+r_3 = 3r \quad r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3 = 3\frac{1}{r^2} \quad r_1r_2r_3 = -\frac{1}{r}$$

En utilisant la première et la troisième égalité, on obtient $x_{G'} = x_{H'}$, puis en utilisant la deuxième et la troisième égalité, on obtient $r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3 = -3(r_1r_2r_3)^2$ ce qui entraine immédiatement que $y_{G'} = y_{H'}$. On a ainsi prouvé que l'orthocentre et le centre de gravité de R_1R_2R3 sont confondus.

c. Le point précédent montre que la hauteur et la médiane issues de A sont confondues, le triangle est isocèle en A. De la même façon, il est isocèle en B et C, il est donc équilatéral.

$\boxed{Q\ 11}$ L'idée est de choisir un point G de l'hyperbole qui jouera le rôle du centre de gravité, de construire le symétrique G' de ce point par rapport à O qui se trouve sur (γ), (cela correspond au point D) puis de construire le cercle de centre G passant par G' et de construire les points A,B,C intersection du cercle et de l'hyperbole.