MPSI 2 : Complexes, fonctions

pour le jeudi 16 octobre 2003

1 Complexes

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$, et l'on note ω la racine nième primitive de l'unité. On notera U_n l'ensemble des racines nièmes de l'unité.

$\boxed{Q\ 1}$ Soit un entier relatif $p \in \mathbb{Z}$. Calculer la somme

$$W_p = \sum_{u \in U_n} u^p$$

On considère un n-uplet de nombres complexes $S^{(0)} = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On lui associe le n-uplet de complexes $T^{(0)} = (t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ défini par

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!], \quad t_i = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{ij} s_j \tag{1}$$

$\boxed{Q\ 2}$ Écrire le système d'équations qui lie les complexes $(t_0, \dots, t_{n-1})$ aux complexes $(s_0, \dots, s_{n-1})$. Exprimer alors le complexe s_0 en fonction des complexes $(t_0, \dots, t_{n-1})$.

$\boxed{Q\ 3}$ Plus généralement, en multipliant pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, la ligne de t_i du système précédent par ω^{-ij}, et en sommant les égalités obtenues, exprimer pour $j \in [\![0,n-1]\!]$, le complexe s_j en fonction des complexes $(t_0, \dots, t_{n-1})$.

On construit maintenant par récurrence une suite $S^{(p)} = (s_0^{(p)}, \dots, s_{n-1}^{(p)})$ de n uplets de la façon suivante. On pose par convention $s_n^{(p)} = s_0^{(p)}$ et

$$\forall j \in [\![0,n-1]\!], \quad s_j^{(p+1)} = \frac{s_j^{(p)} + s_{j+1}^{(p)}}{2}$$

À chaque n-uplet $S^{(p)}$, on fait correspondre le n-uplet $T^{(p)}$ défini par la relation 1.

$\boxed{Q\ 4}$ Calculer les composantes du n-uplet $T^{(1)}$ à partir de ceux de $T^{(0)}$. On montrera que $\forall j \in [\![0,n-1]\!]$,

$$t_j^{(1)} = \frac{1+\omega^j}{2\omega^j} t_j$$

$\boxed{Q\ 5}$ En déduire les composantes $t_j^{(p)}$ du n-uplet $T^{(p)}$ en fonction des composantes du n-uplet $T^{(0)}$.

$\boxed{Q\ 6}$

a. Montrer que $\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $\left|1+\omega^j\right| < 2$;

b. En déduire la limite lorsque $p \to +\infty$ de chacune des composantes $t_j^{(p)}$ du n-uplet $T^{(p)}$;

c. En déduire enfin la limite lorsque $p \to +\infty$ de chacune des composantes $s_j^{(p)}$ du n-uplet $S^{(p)}$.

2 Une équation différentielle

Dans tout le problème, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et l'équation différentielle :

$$(E) \;\; : y'' - y = f(x)$$

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

2.1 Résolution de (E)

$\boxed{Q\ 7}$ Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$(H) \;\; : y'' - y = 0$$

est $\mathcal{S}_H = \{\lambda \operatorname{ch}(x) + \mu \operatorname{sh}(x);\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrer que la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{sh} x \int_0^x f(t) \operatorname{ch} t \,\mathrm{d}t - \operatorname{ch} x \int_0^x f(t) \operatorname{sh} t \,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est une solution particulière de (E). En déduire l'ensemble des solutions de (E).

On suppose dans cette partie que la fonction f est périodique de période $T > 0$.

$\boxed{Q\ 9}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $g(x+T) - g(x)$ en fonction de $g(T)$, $g'(T)$ et $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

$\boxed{Q\ 10}$ Soient deux réels $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x = 0$$

Montrer que $(\lambda,\mu) = (0,0)$.

$\boxed{Q\ 11}$ Montrer qu'il existe une unique solution $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de (E) qui soit périodique de période T.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Comme $U_n = \{\omega^k\ ;\ k \in [\![0,n-1]\!]\}$, la somme s'écrit

$$W_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^p\right)^k$$

On reconnaît une somme géométrique de raison ω^p. Étudions donc deux cas :
- Si $\omega^p = 1$, c'est à dire $p \equiv 0 \mod (n)$, alors $\boxed{W_p = n}$;
- si $\omega^p \neq 1$, c'est à dire que p n'est pas un multiple de n, alors

$$W_p = \frac{\omega^{np} - 1}{\omega - 1} = \boxed{0}$$

En effet, $\omega^{np} = (\omega^n)^p = 1$.

$\boxed{Q\ 2}$ Écrivons le système d'équations liant les complexes t_i aux complexes s_i :

$$\begin{cases} t_0 & = \omega^0 s_0 + \omega^0 s_1 + \cdots + \omega^0 s_j + \cdots + \omega^0 s_{n-1} \\ t_1 & = \omega^0 s_0 + \omega^1 s_1 + \cdots + \omega^j s_j + \cdots + \omega^{n-1} s_{n-1} \\ \vdots & = \vdots \\ t_i & = \omega^0 s_0 + \omega^i s_1 + \cdots + \omega^{ij} s_j + \cdots + \omega^{i(n-1)} s_{n-1} \\ \vdots & = \vdots \\ t_{n-1} & = \omega^0 s_0 + \omega^{n-1} s_1 + \cdots + \omega^{(n-1)j} s_j + \cdots + \omega^{(n-1)(n-1)} s_{n-1} \end{cases}$$

En sommant toutes ces égalités, on trouve

$$(t_0 + \cdots + t_{n-1}) = n s_0$$

En effet, pour $1 \leq j \leq n-1$, la somme des coefficients de la colonne j vaut

$$S_j = \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\omega^i\right)^j = W_j = 0$$

puisque c'est la somme de toutes les racines nièmes de l'unité à la puissance j, avec j qui n'est pas un multiple de n (question 1). On a donc

$$\boxed{s_0 = \frac{1}{n}(t_0 + \cdots + t_{n-1})}$$

$\boxed{Q\ 3}$ Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Calculons le coefficient de z_k obtenu en sommant tous les coefficients de la kième colonne. Il vaut

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ik} \times \omega^{-ij} = \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{i(k-j)} = \sum_{u \in U_n} u^{k-j}$$

Par conséquent, lorsque $k = j$, ce coefficient vaut n et lorsque $k \neq j$, c'est la somme de toutes les racines nièmes de l'unité à la puissance $(k-j)$. Comme $(k-j)$ n'est pas un multiple de n, cette somme vaut 0 d'après la question 1. Donc on trouve que

$$\boxed{s_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{-ij} t_i}$$

On remarque que losque $j = 0$, cette formule redonne l'expression de s_0 trouvée à la question précédente.

$\boxed{Q\ 4}$ Soit $j \in [\![0,n-1]\!]$. Par définition de $t_j^{(1)}$,

$$\begin{aligned}
t_j^{(1)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} s_i^{(1)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} \frac{s_i + s_{i+1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} s_i + \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} s_{i+1}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} s_i + \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)j} s_k\Big] \quad (k = i+1) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} s_i + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{ij}\omega^{-j} s_i + \omega^{(nj-j)} s_n\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} s_i + \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij}\omega^{-j} s_i\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} s_i \Big[1 + \frac{1}{\omega^j}\Big] \\
&= \frac{1+\omega^j}{2\omega^j}\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} s_i \\
&= \frac{1+\omega^j}{2\omega^j} t_j
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\omega^{nj-j} s_n = \omega^{-j} s_0$ puisque $\omega^n = 1$ et que $s_n = s_0$.

$\boxed{Q\ 5}$ Le calcul précédent permet de la même façon d'exprimer t_j^{p+1} en fonction de t_j^p :

$$\forall j \in [\![0,n-1]\!], \quad t_j^{(p+1)} = \frac{1+\omega^j}{2\omega^j} t_j^{(p)}$$

ce qui montre que la suite $(t_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1+\omega^j}{2\omega^j}$, et donc que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall j \in [\![0,n-1]\!], \quad \boxed{t_j^{(p)} = \Big(\frac{1+\omega^j}{2\omega^j}\Big)^p t_j}$$

$\boxed{Q\ 6}$

a. Lorsque $j \in [\![1,n-1]\!]$, d'après l'inégalité triangulaire, $\left|1+\omega^j\right| \le 1 + \left|\omega^j\right| = 2$ puisque $|\omega| = 1$. Si l'on avait l'égalité $|1+\omega^j| = 2$, on aurait l'égalité dans l'inégalité triangulaire, et donc il existerait un réel positif $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\omega^j = \lambda$, ce qui est faux pour $j \in [\![1,n-1]\!]$ (ω^j décrit l'ensemble des racines nièmes de l'unité différentes de 1). Donc $\left|1+\omega^j\right| < 2$.

b. Lorsque $j \in [\![1,n-1]\!]$, puisque $\left|\dfrac{1+\omega^j}{2\omega^j}\right| = \dfrac{\left|1+\omega^j\right|}{2\left|\omega^j\right|} < \dfrac{2}{2} = 1$, la suite géométrique de raison $\dfrac{1+\omega^j}{2\omega^j}$ converge vers 0, et donc $\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $t_j^{(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Lorsque $j = 0$, $\dfrac{1+\omega^0}{2\omega^0} = 1$, et donc la suite $t_0^{(p)}$ est constante et vaut t_0. Donc $t_0^{(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} t_0$.

c. D'après la question 3, pour $j \in [\![0,n-1]\!]$,

$$s_j^{(p)} = \frac{1}{n}\sum_{i=0} \omega^{-ij} t_j^{(p)}$$

Comme chacune des suites $t_j^{(p)}$ converge vers 0 pour $j \in [\![1,n-1]\!]$, et que la suite $t_0^{(p)}$ converge vers t_0, il vient que la suite $s_j^{(p)}$ converge vers $\dfrac{t_0}{n}$. Et puisque $t_0 = (s_0 + \cdots + s_{n-1})$, on obtient finalement :

$$\forall j \in [\![0,n-1]\!], \quad \boxed{s_j^{(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n}}$$

On a montré un résultat géométrique assez intuitif. Étant donnés un polygône S_n formé de n points du plans, d'affixes les complexes, $(s_0,\dots,s_{n-1})$, et la transformation géométrique du polygône en un autre polygône formé des milieux des sommets, si l'on itère cette transformation géométrique, le polygnône « tend » vers un point, qui est l'isobarycentre des n sommets d'affixes $(s_0,\dots,s_{n-1})$.

$\boxed{Q\ 7}$ L'équation différentielle (H) est homogène du deuxième ordre à coefficients constants. On sait d'après le cours que l'ensemble de ses solutions est $\mathcal{S}_1 = \{Ae^x + Be^{-x};\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrons que $\{Ae^x + Be^{-x};\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\} = \{\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x;\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathcal{S}_2$.

- $\subset$ soient $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et la fonction f définie par $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$. On peut écrire $f(x) = A(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) + B(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = (A+B)\operatorname{ch} x + (A-B)\operatorname{sh} x$ et en posant $\lambda = A+B$ et $\mu = A-B$, on a bien $f \in \mathcal{S}_2$.
- $\supset$ se montre de même en exprimant ch, et sh à l'aide d'exponentielles.

$\boxed{Q\ 8}$ Utilisons le théorème fondamental. La fonction définie par $\phi(x) = \int_0^x f(t)\operatorname{ch} t\, dt$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = f(x)\operatorname{ch} x$. De même pour $\psi(x) = \int_0^x f(t)\operatorname{sh} t\, dt$. On calcule alors pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} g'(x) = \operatorname{ch} x \int_0^x f(t)\operatorname{ch} t\, dt + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x f(x) - \operatorname{sh} x \int_0^x f(t)\operatorname{sh} t\, dt - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x f(x) = \operatorname{ch} x \int_0^x f(t)\operatorname{ch} t\, dt - \operatorname{sh} x \int_0^x f(t)\operatorname{sh} t\, dt \\ g''(x) = \operatorname{sh} x \int_0^x f(t)\operatorname{ch} t\, dt + \operatorname{ch}^2 x f(x) - \operatorname{ch} x \int_0^x f(t)\operatorname{sh} t\, dt - \operatorname{sh}^2 x f(x) = g(x) + f(x) \end{cases}$$

et donc $g \in \mathcal{S}$.

$\boxed{Q\ 9}$ Considérons la fonction ϕ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = g(x+T) - g(x)$. Elle est deux fois dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi''(x) = g''(x+T) - g''(x) = g(x+T) - g(x)$ (car $g \in \mathcal{S}$). Par conséquent, $\phi \in \mathcal{S}_H$ et donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = g(x+T) - g(x) = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$$

En prenant $x = 0$, on tire que $\lambda = g(T)$ $(g(0) = 0)$. En dérivant ϕ et en faisant $x = 0$, on tire également $\mu = g'(T)$ et finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+T) - g(x) = g(T)\operatorname{ch} x + g'(T)\operatorname{sh} x$$

$\boxed{Q\ 10}$ En prenant $x = 0$, et par exemple $x = 1$, on trouve que

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda \operatorname{ch}(1) + \mu \operatorname{sh}(1) & = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve que $\lambda = \mu = 0$.

$\boxed{Q\ 11}$ Soit une solution $k \in \mathcal{S}$ qui est T-périodique. On sait qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x + g(x)$ Calculons alors pour $x \in \mathbb{R}$,

$$k(x+T) - k(x) = \lambda[\operatorname{ch}(x+T) - \operatorname{ch}(x)] + \mu[\operatorname{sh}(x+T) - \operatorname{sh}(x)] + g(x+T) - g(0)$$

On doit donc avoir

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big[g(T) + \lambda \operatorname{ch}(T) - \lambda + \mu \operatorname{sh}(T)\big]\operatorname{ch} x + \big[g'(T) + \lambda \operatorname{sh}(T) + \mu \operatorname{ch}(T) - \mu\big]\operatorname{sh}(x) = 0$$

D'après la question précédente, (λ,μ) doivent donc être solution du système :

$$\begin{cases} \lambda(\operatorname{ch}(T) - 1) + \mu \operatorname{sh}(T) & = -g(T) \\ \lambda \operatorname{sh}(T) + \mu(\operatorname{ch}(T) - 1) & = -g'(T) \end{cases}$$

Nous savons qu'un système linéaire 2×2 possède une unique solution si et seulement si son déterminant est non-nul. Ici, le déterminant vaut $(\operatorname{ch} T - 1)^2 - \operatorname{sh}^2 T = 2(1 - \operatorname{ch} T) \neq 0$ puisque $T \neq 0$.