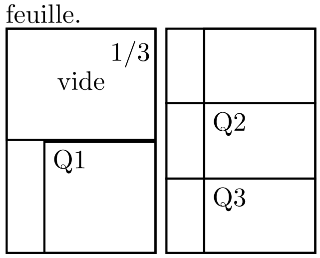
MPSI 2
DS 10

le 28 mai 2003

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés.*
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Une fonction définie par une intégrale généralisée

$\boxed{Q\ 1}$ On considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^\alpha}$ Montrer que la fonction f_α est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha \in I$ où I est un intervalle à préciser.

On définit alors la fonction

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^\alpha} \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 2}$

a. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^3+1}$.

b. Calculer une primitive F de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

c. Calculer $\phi(1)$.

$\boxed{Q\ 3}$ Calculer $\phi(4/3)$.

$\boxed{Q\ 4}$ Étudier la monotonie de la fonction ϕ sur l'intervalle I.

$\boxed{Q\ 5}$ Montrer que $\forall \alpha \in I$, on a la relation :

$$3\alpha\phi(\alpha+1) = (3\alpha - 1)\phi(\alpha). \tag{1}$$

On considère un réel $A > 0$.

$\boxed{Q\ 6}$ Montrer que $\int_A^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+x^3)^\alpha} \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} 0$. On traitera séparément les cas où $A \geq 1$ et où $A < 1$.

$\boxed{Q\ 7}$ En déduire qu'il existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \alpha \geq \alpha_0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^\alpha} \leq 2A$$

et déterminer $\lim_{\alpha \to +\infty} \phi(\alpha)$.

2 Étude des quarts de tour

On considère dans ce problème un espace euclidien E de dimension 4 orienté. On notera $(x \mid y)$ le produit scalaire de deux vecteurs et $\|x\|$ la norme euclidienne associée. On appelle *quart de tour* un endomorphisme $q \in L(E)$ qui vérifie :

1. q est un endomorphisme orthogonal : $\forall x \in E$, $\|q(x)\| = \|x\|$;
2. $q^2 = -\,\mathrm{id}_E$.

On notera $\mathcal{Q}$ l'ensemble des quarts de tour de E et on définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle l'expression du polynôme caractéristique d'un endomorphisme u : $P_u(\lambda) = \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.

$\boxed{Q\ 8}$ Soit un endormophisme orthogonal u. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

$\boxed{Q\ 9}$ On considère une base orthonormale ε de E et on note $Q = \mathrm{Mat}_\varepsilon(q)$. Montrer que la matrice Q est inversible et antisymétrique.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer qu'un quart de tour ne possède pas de valeur propre réelle.

$\boxed{Q\ 11}$

a. Montrer (sans utiliser les matrices) qu'un quart de tour q est un endomorphisme antisymétrique : $\forall (x,y) \in E^2$, $(q(x) \mid y) = -(x \mid q(y))$.

b. Montrer qu'un quart de tour q transforme tout vecteur $x \in E$ en un vecteur orthogonal à x.

$\boxed{Q\ 12}$ On considère une base orthonormale ε et on note q l'endormorphisme ayant pour matrice M dans la base ε. Vérifier que q est un quart de tour.

$\boxed{Q\ 13}$ Soit un vecteur unitaire $b_1 \in E$: $\|b_1\| = 1$ et un quart de tour q.

a. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\varepsilon = (b_1,b_2,b_3,b_4)$ telle que $\mathrm{Mat}_\varepsilon(q) = M$.

b. On note $P = \mathrm{Vect}(b_1,b_2)$. Montrer que le plan vectoriel P est stable par q.

c. Que peut-on dire de la restriction de q à P ?

d. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M et retrouver le résultat de la question 10.

$\boxed{Q\ 14}$ On considère dans cette question un demi-tour $q \in \mathcal{Q}$ et un réel $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit l'endomorphisme $f = \cos\alpha.\,\mathrm{id}_E + \sin\alpha.q$.

a. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal.

b. Soit un vecteur normé u : $\|u\| = 1$. Montrer qu'il existe un plan vectoriel P stable par f contenant le vecteur u.

c. Que peut-on dire de la restriction de l'endomorphisme f au plan P ?

d. Calculer le déterminant de l'endomorphisme f.

e. Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f et déterminer ses racines complexes.

$\boxed{Q\ 15}$

a. On considère un quart de tour q. Montrer qu'il existe deux symétries orthogonales s_1 et s_2 telles que $q = s_1 \circ s_2$. On précisera l'ensemble des vecteurs invariants pour ces deux symétries.

b. Montrer que si s_1 et s_2 sont deux symétries orthogonales quelconques vérifiant $q = s_1 \circ s_2$, alors s_1 et s_2 ne commutent pas.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ La fonction f_α est continue et postive sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Lorsque $x \to +\infty$, $f_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3\alpha}}$.

La fonction de référence $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3\alpha}}$ est intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ si et seulement si $3\alpha > 1$. D'après le critère d'équivalence pour les fonctions positives, la fonction f_α est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\boxed{\alpha \in]1/3,+\infty[}$.

$\boxed{Q\ 2}$

a. $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$ (-1 est racine évidente du polynôme X^3+1. La décomposition s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$

En multipliant par X et en prenant $x=-1$, on trouve que $a = 1/3$. En multipliant par x et en faisant tendre x vers l'infini, on trouve que $a+b=0$ d'où $b=-1/3$. En faisant $x=0$, on trouve que $c = 2/3$. Finalement,

$$\boxed{\frac{1}{X^3+1} = \frac{1/3}{X+1} - \frac{1}{3}\frac{X-2}{X^2-X+1}}$$

b. $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(x+1) - \dfrac{1}{6}\int \dfrac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\ln(x+1) - \dfrac{1}{6}\ln(x+1) + \dfrac{1}{2}G(x)$ où $G(x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+a^2}$ avec $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Par le changement de variables $u = x - 1/2$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, puisque $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan(u/a)$, on trouve que $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Finalement

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{3}\ln\Big(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big)}$$

c. Puisque la fonction f_1 est intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, on sait que $\phi(1) = \int_0^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X f_1(x)\,\mathrm{d}x$. Mais pour $X>0$, on calcue $\int_0^X f_1(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^X = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{X+1}{\sqrt{X^2-X+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2X+1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Comme $\dfrac{X+1}{\sqrt{X^2-X+1}} \underset{X\to+\infty}{\sim} 1$, et que $\arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$, $\int_0^X f_1(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X\to+\infty]{} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\pi}{6}$ et donc $\boxed{\phi(1) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$.

$\boxed{Q\ 3}$ Écrivons

$$\phi(4/3) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3(1+1/x^3)^{4/3}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Par le changement de variables $t = x^{-3}$, on obtient

$$\phi(4/3) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{3(1+t)^{4/3}} = \Big[-(1+t)^{-1/3}\Big]_0^{+\infty} = 1$$

Donc $\boxed{\phi(4/3) = 1}$.

$\boxed{Q\ 4}$ Soit deux réels vérifiant $1/3 < \alpha \le \alpha'$. Comme $\forall x \in [0,+\infty[$, $\dfrac{1}{(x^3+1)^\alpha} \ge \dfrac{1}{(x^3+1)^{\alpha'}}$, il vient que $\phi(\alpha) \ge \phi(\alpha')$. Par conséquent, la fonction ϕ est décroissante sur l'intervalle I.

$\boxed{Q\ 5}$ Considérons la fonction F définie par

$$F(X) = \int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^\alpha}$$

et intégrons $F(X)$ par parties :

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{(x^3+1)^\alpha} & u'(x) = -3\alpha(x^3+1)^{-\alpha-1}x^2 \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$$

On trouve que

$$F(X) = \Big[\frac{x}{(x^3+1)^\alpha}\Big]_0^X + 3\alpha\int_0^X \frac{x^3}{(x^3+1)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{X}{(X^3+1)^\alpha} + 3\alpha\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} - 3\alpha\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^{\alpha+1}}$$

Lorsque $X \to +\infty$, on obtient

$$\phi(\alpha) = 3\alpha\phi(\alpha) - 3\alpha\phi(\alpha+1)$$

d'où la relation cherchée.

$\boxed{Q\ 6}$ Si $A \geq 1$, majorons

$$0 \leq \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} \leq \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{3\alpha}} = \frac{1}{(3\alpha-1)A^{3\alpha-1}} \leq \frac{1}{3\alpha-1} \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0$$

Si $A < 1$, majorons différemment :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} \\ &= \int_A^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} \\ &\leq \frac{1-A}{(1+A^3)^\alpha} + \frac{1}{3\alpha-1} \\ &\xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a montré que

$$\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0$$

$\boxed{Q\ 7}$ Découpons et majorons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} = \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} + \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} \leq A + \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha}$$

D'après la question précédente, $\int_A^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0$. Par conséquent, il existe $\alpha_0 > 1/3$ tel que $\forall \alpha \geq \alpha_0$, $\int_A^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} \leq A$. Pour $\alpha \geq \alpha_0$, on a l'encadrement

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^\alpha} \leq 2A$$

Comme A est arbitraire, l'encadrement de la question précédent montre que $\boxed{\phi(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0}$.

$\boxed{Q\ 8}$ Question de cours. Utiliser l'identité de polarisation.

$\boxed{Q\ 9}$ Comme la base ε est orthonormale et que q est un endomorphisme orthogonal, on sait que la matrice Q est orthogonale : ${}^tQQ = I_n$. Comme $q^2 = -\mathrm{id}_2$, elle vérifie de plus $Q^2 = -I_4$, c'est à dire $Q \times (-Q) = I_4$. On déduit de ces deux relations que Q est inversible et que $Q^{-1} = -Q = {}^tQ$ ce qui montre que la matrice Q est également antisymétrique.

$\boxed{Q\ 10}$ Par l'absurde, supposons qu'un quart de tour q possède un valeur propre réelle λ. Il existerait alors un vecteur propre $x \neq 0$ associé : $q(x) = \lambda x$. Mais comme $q^2 = -\mathrm{id}$, on aurait $q^2(x) = -x$ d'où $(\lambda^2+1)x = 0$. Puisque $x \neq 0$, on aurait $\lambda^2 + 1 = 0$ ce qui est absurde.

$\boxed{Q\ 11}$

a. Soient $(x,y) \in E^2$. Puisque $q^2 = -\operatorname{id}_E$, $y = -q^2(y)$ et donc $(q(x) \mid y) = \big(q(x) \mid -q\big(q(y)\big)\big) = -\,(x \mid q(y))$ d'après la question 8.

b. Soit $x \in E$. En prenant $y = x$, d'après la question précédente, on a $2\,(q(x) \mid x) = 0$ et donc $q(x)$ est un vecteur orthogonal au vecteur x.

$\boxed{Q\ 12}$ On vérifie que la matrice M est orthogonale puisque ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel. On sait alors que l'endomorphisme qu'elle représente dans une base orthonormale de E est un endomorphisme orthogonal. De plus, un calcul immédiat donne $M^2 = -I_4$. Par conséquent, $q^2 = -\operatorname{id}_E$. L'endomorphisme q est bien un quart de tour.

$\boxed{Q\ 13}$

a. Posons $b_2 = q(b_1)$. Comme q est un endomorphisme orthogonal, $\|b_2\| = \|q(b_1)\| = \|b_1\| = 1$. D'après la question 11, on sait également que $(b_1 \mid b_2) = 0$. Considérons le plan vectoriel $F = \operatorname{Vect}(b_1,b_2)^{\perp}$. Il existe un vecteur b_3 non-nul de ce plan, et quitte à le diviser par sa norme, on peut supposer que $\|b_3\| = 1$. Posons alors $b_4 = q(b_3)$. On a comme précédemment $(b_3 \mid b_4) = 0$ et $\|b_4\| = 1$. Comme $b_1,b_2 \in F$ et $b_3,b_4 \in F^{\perp}$, on a également $(b_1 \mid b_3) = (b_2 \mid b_3) = (b_1 \mid b_4) = (b_2 \mid b_4) = 0$. Par conséquent, le système $\varepsilon = (b_1,b_2,b_3,b_4)$ est formé de vecteurs orthogonaux deux à deux. On sait d'après le cours qu'il est libre. Puisque $|\varepsilon| = 4 = \dim E$, c'est donc une base orthonormale de E. Comme $q^2 = -\operatorname{id}_E$, $q(b_2) = q^2(b_1) = -b_1$ et de même $q(b_4) = -b_3$. La matrice de q dans la base ε est donc la matrice M.

b. Facile.

c. Comme (b_1,b_2) est une base orthonormale de P, et que la matrice de la restriction de q à P dans cette base est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix} = R_{\pi/2}$, $q_{|P}$ est la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$ dans le plan P (orienté en en disant que la base (b_1,b_2) est directe).

d. Le polynôme caractéristique de M vaut $P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)^2$ On a utilisé la formule d'un déterminant par blocs $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(C)$. Si l'on considère maintenant un quart de tour q et un vecteur unitaire b_1, on a vu qu'il existait une base orthonormale ε dans laquelle la matrice de q est M. On sait alors qu'un réel λ est valeur propre de l'endomorphisme q si et seulement si il est une racine du polynôme caractéristique de M. Comme ce polynôme n'admet aucune racine réelle, le quart de tour n'admet pas de valeurs propres réelles.

$\boxed{Q\ 14}$

a. On peut considérer une base orthonormale ε construite à la question 13 dans laquelle

$$\operatorname{Mat}_{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

et vérifier que cette matrice est orthogonale. D'après un résultat du cours, on sait alors que f est un endomorphisme orthogonal. On peut également vérifier directement que f conserve les produits scalaires : soient $(x,y) \in E^2$, $(q(x) \mid q(y)) = (\cos\alpha x + \sin\alpha q(x) \mid \cos\alpha y + \sin\alpha q(y)) = \cos^2\alpha\,(x \mid y) + \sin\alpha\cos\alpha\big[(q(x) \mid y) + (x \mid q(y))\big] + \sin^2\alpha\,(q(x) \mid q(y))$ et puisque q est un endomorphisme orthogonal antisymétrique, $(q(x) \mid q(y)) = (x \mid y)$ et $(q(x) \mid y) + (x \mid q(y)) = 0$. On a bien $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$.

b. Reprenons la base orthonormale construite à la question 13a avec $b_1 = u$ et le plan $P = \operatorname{Vect}(b_1,b_2)$. Puisque ce plan vectoriel est stable par q, on montre facilement qu'il est stable par f.

c. La matrice de f dans la base (b_1,b_2) du plan P s'écrit $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ qui est une matrice de rotation d'angle α. La restriction de f à P est donc une rotation vectorielle d'angle α (si l'on oriente le plan P en disant que la base (b_1,b_2) est directe).

d. Utilisons la base ε pour calculer $\det(f) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 = 1$. Nous avons donc montré que f est une isométrie directe.

e. $P_f(\lambda) = \det(f - \lambda\,\mathrm{id}) = \begin{vmatrix} \cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{vmatrix} = \left[(\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha\right]^2$ $P_f(\lambda) = \big(\lambda - (\cos\alpha + i\sin\alpha)\big)^2\big(\lambda - (\cos\alpha - i\sin\alpha)\big)^2$ Les racines de ce polynôme sont donc $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$ et ces deux racines sont des racines doubles.

$\boxed{Q\ 15}$

a. On s'inspire du cours où nous avons décomposé une matrice de rotation en produit de deux matrices de réflexions. (Il suffit de considérer ici la matrice de rotation $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).
Considérons les matrices $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Considérons une base ε construite à la question 13 dans laquelle la matrice de q vaut M. Considérons alors les endomorphismes s_1,s_2 ayant pour matrice S_1 et S_2 dans la base ε. On vérifie par le calcul que $S_1 \times S_2 = M$, donc que $q = s_1 \circ s_2$. Puisque les matrices S_1 et S_2 sont symétriques et orthogonales, elles vérifient les relations ${}^tS = S$ et ${}^tS \times S = I_4$ d'où l'on tire $S^2 = I_4$. On a alors $s_1^2 = s_2^2 = \mathrm{id}_E$, donc s_1 et s_2 sont des symétries vectorielles. Puisque dans la base orthonormale ε leurs matrices sont symétriques, ce sont de plus des endomorphismes symétriques et par conséquent des symétries orthogonales. Par le calcul, on vérifie que l'ensemble des vecteurs invariants de s_1 est le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(b_1 + b_2, b_3 + b_4)$ et pour s_2, le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(b_1, b_3)$.

b. Si $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$, on aurait puisque $s_1^2 = s_2^2 = \mathrm{id}_E$, $q^2 = s_1^2 \circ s_2^2 = \mathrm{id}_E$ ce qui est absurde puisque $q^2 = -\mathrm{id}_E$.