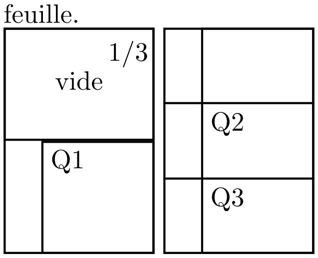
MPSI 2

DS 09

le 07 mai 2003

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

Les calculatrices sont interdites.

1 Exercice 1

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) &= t(1-e^t) \\ y(t) &= \ln(\operatorname{ch} t) \end{cases}$$

$\boxed{Q\ 1}$

a. Calculer $x'(t)$ et $x''(t)$. En déduire le signe de $x'(t)$.
b. Dresser le tableau de variations des fonctions x et y.

$\boxed{Q\ 2}$ Étudier le point stationnaire. On donnera l'équation cartésienne de la tangente en ce point et on précisera la position locale de la courbe par rapport à cette tangente.

$\boxed{Q\ 3}$

a. Préciser la nature de la branche infinie lorsque $t \to +\infty$.
b. Déterminer une équation de l'asymptote lorsque $t \to -\infty$ et préciser la position locale de la courbe par rapport à cette asymptote.

$\boxed{Q\ 4}$ Tracer la courbe dans un repère orthonormé (on donne $\ln 2 \approx 0.7$).

2 Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $\forall t \neq 0,\ f(t) = \dfrac{\arctan(t)}{t}$.

$\boxed{Q\ 5}$ Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa parité.

$\boxed{Q\ 6}$ Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0 et en déduire l'allure locale de la courbe représentative de f au voisinage de 0.

$\boxed{Q\ 7}$ Vérifier que $\forall t \neq 0,\ \displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$ et en déduire les variations de la fonction f. Tracer la courbe représentative de f.

On considère la fonction $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\phi(0) = 1$ et $\forall x \neq 0,\ \phi(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrer que la fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa parité.

$\boxed{Q\ 9}$

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \phi(x) \leq 1$.
b. Déterminer le signe de $\phi'(x)$ pour $x > 0$.
c. Montrer que ϕ est dérivable en 0 et calculer $\phi'(0)$.
d. Tracer le tableau de variations de ϕ.

$\boxed{Q\ 10}$

a. Déterminer la limite de $\phi(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
b. Tracer sur le même graphe les courbes représentatives de f et de ϕ.

$\boxed{Q\ 11}$

a. Montrer que $\forall x > 0$,

$$\left|\phi'(x)\right| \leq \frac{1}{x}\big(1 - f(x)\big) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

b. En déduire que $\forall x > 0$, $|\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$ puis que cette inégalité reste valable pour $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{Q\ 12}$

a. Montrer que l'équation $\phi(x) = x$ possède une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$, puis que $\alpha \in]0,1]$.
b. On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \phi(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

$\boxed{Q\ 13}$ On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2 y' + xy = \arctan(x)$$

a. Résoudre cette équation différentielle sur les intervalles $I_1 =]-\infty,0[$ et $I_2 =]0,+\infty[$.
b. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

3 Exercice 3

Pour un réel $x \in \mathbb{R}$, on considère les trois matrices carrées d'ordre $(n+1)$, $A_n = ((a_{ij}))$, $B_n = ((b_{ij}))$ et $C_n = ((c_{ij})) \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ où les coefficients sont définis par :

$$\begin{cases} a_{ij} & = (x+i+j-1)^n \\ b_{ij} & = \dbinom{n}{j-1} i^{n-j+1} \\ c_{ij} & = (x+j-1)^{i-1} \end{cases}$$

$\boxed{Q\ 14}$ Écrire les matrices d'ordre 3, A_2, B_2 et C_2.

$\boxed{Q\ 15}$ Montrer que $\forall n \geq 2$, $A_n = B_n \times C_n$.

$\boxed{Q\ 16}$ Lorsque $x = 0$, montrer que $\det(C_n) = n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)$.

$\boxed{Q\ 17}$ Calculer $\det(B_n)$ lorsque $x = 0$.

$\boxed{Q\ 18}$ On considère le déterminant d'ordre $n+1$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1^n & 2^n & \dots & (n+1)^n \\ 2^n & 3^n & \dots & (n+2)^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (n+1)^n & (n+2)^n & \dots & (2n+1)^n \end{vmatrix}$$

Montrer que $\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n!)^{n+1}$.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$

a. On calcule $x'(t) = 1 - e^t - te^t$ puis $x''(t) = -(t+2)e^t$. Donc $x''(t) > 0$ pour $t < -2$ et $x''(t) \leq 0$ pour $t \geq -2$. Puisque $x'(-2) = 1 + \dfrac{1}{e^2} > 1$ et que $x'(t) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1 > 0$, la fonction x' ne s'annule qu'une fois entre -2 et $+\infty$. Comme il y a un zéro évident : $x'(0) = 0$ on en déduit que $x'(t) > 0$ pour $t < 0$ et $x'(t) \leq 0$ pour $t \geq 0$:

t	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x''(t)$		$+$	0		$-$		
$x'(t)$	1	$\nearrow$	$1+2/e^2$	$\searrow$	0	$\searrow$	

b. $y'(t) = \operatorname{th}(t)$ dont le signe est connu. On trace facilement le tableau de variations des fonctions x et y.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$y'(t)$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{Q\ 2}$ $M(0)$ est l'unique point stationnaire. En effectuant un $DL(0,3)$ des deux fonctions, on trouve que :

$$\overrightarrow{F}(t) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}-1/2\\0\end{pmatrix} + o(t^3)$$

En notant $\overrightarrow{u} = (-1,1/2)$ et $\overrightarrow{v} = (-1/2,0)$, ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$. Dans le repère $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, les coordonnées du point $M(t)$ sont $X(t)$ et $Y(t)$. On sait que $X(t) \underset{t\to0}{\sim} t^2$, $Y(t) \underset{t\to0}{\sim} t^3$. Le point $M(0)$ est donc un point de rebroussement de première espèce. Faire un schéma de l'allure locale de la courbe. La tangente en $M(0)$ passe par l'origine et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. Son équation cartésienne est $\boxed{2y + x = 0}$.

$\boxed{Q\ 3}$

a. Puisque $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} te^t$ et $y(t) = \ln\Big[\dfrac{e^t}{2}\big(1+e^{-2t}\big)\Big] = t - \ln 2 + \ln(1+e^{-2t}) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$, il vient que $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. S'il y avait une droite asymptote à la courbe, elle serait horizontale, mais puisque $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, il n'y a qu'une direction asymptotique horizontale.

b. On a $y(t) = \ln\Big[\dfrac{e^{-t}}{2}\big(1+e^{2t}\big)\Big] = -t - \ln 2 + \ln(1+e^{2t})$. Donc

$$y(t) + x(t) = -\ln 2 + \ln(1+e^{2t}) - te^t = -\ln 2 - te^t + e^{2t} + o(e^{2t})$$

Puisque $e^{2t} = o(te^t)$ lorsque $t \to -\infty$, on en tire que

$$y(t) - \big[-x(t) - \ln 2\big] \underset{t\to-\infty}{\sim} -te^t$$

Comme cette quantité tend vers 0, la droite d'équation $y = -x - \ln 2$ est asymptote à la courbe et puisque sur un voisinage de $-\infty$, cette quantité a même signe que l'équivalent, on en déduit que la courbe est située localement au dessus de l'asymptote.

$\boxed{Q\ 4}$

$\boxed{Q\ 5}$ Puisque $\arctan t \underset{t\to0}{\sim} t$, $f(t) \underset{t\to0}{\sim} 1 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0. Par les théorèmes généraux, elle est continue en tout point $t_0 \neq 0$, donc $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. La fonction est paire.

$\boxed{Q\ 6}$ On connaît le DL(0, 3) de $\arctan(t) = t - \dfrac{t^3}{3} + o(t)$ d'où $f(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$. On en déduit que la fonction f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ et que localement, la courbe se trouve en dessous de sa tangente.

$\boxed{Q\ 7}$ Soit $t \in \mathbb{R}$. On calcule $f'(t) = \dfrac{1}{t(t^2+1)} - \dfrac{\arctan t}{t^2}$. Intégrons par parties

$$I = \int_0^t \frac{\mathrm{d}w}{w^2+1} = \Big[\frac{w}{w^2+1}\Big]_0^t + 2\int_0^t \frac{w^2}{(w^2+1)^2}\,\mathrm{d}w$$

On en tire que

$$\int_0^t \frac{w^2}{(w^2+1)^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\Big(\arctan t - \frac{t}{t^2+1}\Big) = -\frac{t^2}{2}f'(t)$$

Comme la fonction $w \mapsto \dfrac{w^2}{(w^2+1)^2}$ est positive, on en déduit que $f'(t) \leq 0$ lorsque $t \geq 0$ et $f'(t) \geq 0$ lorsque $t \leq 0$.

$\boxed{Q\ 8}$ Notons $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental, on sait que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi'(x) = f(x)$. Comme $\forall x \neq 0$, $\phi(x) = \dfrac{\psi(x)}{x}$, la fonction ϕ est continue en tout point $x_0 \neq 0$ comme produit de fonctions continues. Vérifions que ϕ est continue en 0. Soit $x \neq 0$, puisque $\phi(x) = \dfrac{\psi(x)-\psi(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \psi'(0) = f(0) = 1$, (on reconnaît un taux d'accroissement), il vient que $\phi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \phi(0)$ et donc ϕ est continue en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons $\phi(-x) = -\dfrac{1}{x}\int_0^{-x} f(t)\ \mathrm{d}t$. Par le changement de variables $y = -x,\ \mathrm{d}y = -\ \mathrm{d}x$, $\phi(-x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(y)\ \mathrm{d}y = \phi(x)$. La fonction ϕ est donc paire.

$\boxed{Q\ 9}$

a. Il suffit de démontrer le résultat pour $x > 0$ puisque ϕ est paire. Soit $x > 0$. D'après les variations de f, on sait que $\forall t \in [0,x]$, $f(x) \leq f(t) \leq 1$. Par conséquent,

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\ \mathrm{d}t \leq \phi(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{d}t = 1$$

b. Puisque $\forall x > 0$, $\phi(x) = \dfrac{\psi(x)}{x}$, on en tire que ϕ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x > 0$,

$$\phi'(x) = \frac{xf(x)-\psi(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\big[f(x)-\phi(x)\big] \leq 0$$

c. Utilisons les développements limités. Puisque ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, que $\psi'(x) = f(x) = 1 + o(t)$, par primitivation de DL, $\psi(x) = \psi(0) + x + o(x^2)$. Ensuite, $\phi(x) = \dfrac{\psi(x)}{x} = 1 + o(x)$. Comme la fonction ϕ admet un $DL(0{,}1)$, elle est dérivable en 0 avec $\phi'(0) = 0$.

d. En utilisant la parité de ϕ, ϕ est décroissante sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $]-\infty,0]$.

$\boxed{Q\ 10}$ Soit $x \geq 1$. Découpons l'intégrale : $\phi(x) = \dfrac{C}{x} + \theta(x)$ où $C = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ et

$$0 \leq \theta(x) = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\pi}{2t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi \ln x}{2x}$$

On a donc l'encadrement

$$0 \leq \phi(x) \leq \frac{C}{x} + \frac{\pi \ln x}{2x}$$

et d'après le théorème des gendarmes $\phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{Q\ 11}$

a. Soit $x > 0$. En utilisant le calcul de la question 9b, ainsi que l'inégalité démontrée en 9a,

$$\left|\phi'(x)\right| = \frac{1}{x}\left|f(x)-\phi(x)\right| = \frac{1}{x}\big(\phi(x)-f(x)\big) \leq \frac{1-f(x)}{x}$$

Mais on calcule l'intégrale

$$\int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = x - \arctan(x)$$

et donc puisque $1 - f(x) = \dfrac{x - \arctan x}{x}$, $|\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}\int_0^x \dfrac{t^2}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$.

b. Puisque $\forall t \geq 0$, $(t-1)^2 \geq 0$, il vient que $2t \leq t^2+1$ et donc que $\forall t \in [0,x]$, $\dfrac{t^2}{t^2+1} \leq \dfrac{t}{2}$. En intégrant cette inégalité, on trouve que

$$\left|\phi'(x)\right| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4}$$

Comme ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et paire, ϕ' est impaire. On en déduit facilement que l'inégalité reste valable pour $x \geq 0$.

$\boxed{Q\ 12}$

a. Définissons la fonction $\lambda : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \phi(x) - x \end{array}\right.$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda'(x) = \phi'(x) - 1 \leq 1/4 - 1 < 0$ d'après la question précédente. D'après le théorème de la bijection, λ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\lambda(\mathbb{R})$. Puisque $\lambda(0) = \phi(0) = 1$, et que $\lambda(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, la fonction λ possède un unique zéro $\alpha \in]0, +\infty[$. Puisque $\lambda(1) = \phi(1) - 1 \leq 0$ d'après l'inégalité démontrée en 9, il vient que $\alpha \in]0,1]$.

b. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = |u_n - \alpha|$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons

$$v_{n+1} = |u_{n+1} - \alpha| = |\phi(u_n) - \phi(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha| = \frac{v_n}{4}$$

En effet, puisque ϕ est dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\phi'(x)| \leq 1/4$, la fonction ϕ est 1/4-lipschitzienne (inégalité des accroissements finis). Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \dfrac{v_0}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par conséquent la suite (u_n) converge vers α, unique point fixe de ϕ.

$\boxed{Q\ 13}$

a. Sur ces deux intervalles, puisque la fonction $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas, on sait que l'équation différentielle possède les mêmes solutions que l'équation normalisée :

$$(E_N) \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{\arctan x}{x^2}$$

Considérons l'équation homogène associée :

$$(H) \quad y' + \frac{1}{x}y = 0$$

En notant $a(x) = \dfrac{1}{x}$, $A(x) = \int a(x)\ \mathrm{d}x = \ln|x|$, on sait que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est une droite vectorielle : $\mathcal{S}_H = \{Ce^{-A(x)};\ C \in \mathbb{R}\} = \{\dfrac{C}{|x|};\ C \in \mathbb{R}\} = \{\dfrac{C}{x};\ C \in \mathbb{R}\}$. Recherchons une solution particulière de l'équation (E_N) en utilisant la méthode de la variation de la constante : la fonction $y(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ est solution de (E_N) si et seulement si $\forall x \in I_k$, $\dfrac{C'(x)}{x} = \dfrac{\arctan x}{x^2}$, c'est à dire $C'(x) = f(x)$. Il suffit de prendre $C(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ et donc $y(x) = \phi(x)$ est une solution particulière. L'ensemble de toutes les solutions de (E) sur I_k est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{C}{x} + \phi(x);\ C \in \mathbb{R}\}}$$

b. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de y à I_k doit être une solution de (E) sur I_k et donc nécessairement, il existe $(C_1,C_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que $\forall x \in I_1$, $y(x) = \dfrac{C_1}{x} + \phi(x)$ et $\forall x \in I_2$, $y(x) = \dfrac{C_2}{x} + \phi(x)$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier doit être continue en 0, mais $\forall x > 0$, $y(x) = \dfrac{C_2 + \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t}{x}$. Puisque $\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to0]{} 0$, pour que y ne tende pas vers l'infini en 0, il est nécessaire que $C_2 = 0$. De même, en examinant la limite à droite en 0, il faut que $C_1 = 0$. Par conséquent, la seule solution possible de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction ϕ. On vérifie réciproquement que ϕ est bien une solution sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \neq 0$, $x^2\phi'(x) + x\phi(x) = \arctan(x)$ et que l'équation (E) est vérifiée en $x = 0$.

$\boxed{Q\ 14}$ $A_2 = \begin{pmatrix} (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \\ (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & (x+1) & (x+2) \\ x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{Q\ 15}$ En utilisant la formule du binôme, pour $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$

$$\begin{aligned} a_{ij} = (x+j-1+i)^n &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} i^{n-p}(x+j-1)^p \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} i^{n-k+1}(x+j-1)^{k-1} \quad (k = p+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} b_{ik}c_{kj} \end{aligned}$$

On reconnaît le coefficient de la matrice produit $B_n \times C_n$.

$\boxed{Q\ 16}$ En développant par rapport à la première colonne :

$$\det(C_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2^n & \dots & n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^n & \dots & n^n \end{vmatrix}$$

On peut mettre 2 en facteur dans la deuxième colonne, 3 dans la troisième .... On fait alors apparaître un déterminant de Vandermonde :

$$\det(C_n) = n!V(1,2,\dots,n) = n! \prod_{1 \leq i < j \neq n} (j-i)$$

$\boxed{Q\ 17}$ Mettons d'abord en facteur les coefficients binômiaux :

$$\det(B_n) = \binom{n}{0}\binom{n}{1}\dots\binom{n}{n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n+1)^n & (n+1)^{n-1} & \dots & (n+1) & 1 \end{vmatrix}$$

On reconnaît quasiment un déterminant de Vandermonde, mais l'ordre des colonnes est inversé. En effectuant les échanges $C_n \leftrightarrow C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftrightarrow C_{n-2} \dots C_2 \leftrightarrow C_1$, on met la dernière colonne en première position sans modifier l'ordre des autres colonnes. On recommence et au bout de $n + (n-1) + \dots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ échanges, on trouve un déterminant de Vandermonde $V(1,2,\dots,n+1)$. Finalement :

$$\det(B_n) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j-1)$$

$\boxed{Q\ 18}$ Puisque $\Delta_n = \det(A_n)$ lorsque $x = 0$, on tire $\Delta_n = \det(B_n) \times \det(C_n)$, c'est à dire $\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n! \times \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j-1)$. Mais on simplifie :

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{(n!)^{n+1}}{[0!1!\dots n!]^2}$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} = 1!2!\dots(n-1)!$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j-i) = 1!2!\dots(n-1)!n!$$

et finalement on obtient le résultat demandé.