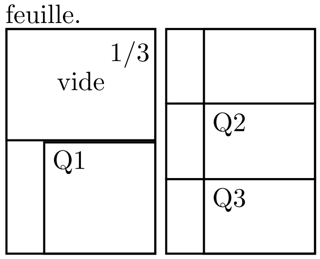
MPSI 2
DS 07

le 02 avril 2003

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Exercice 1

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $3n$ et un endomorphisme $f \in L(E)$ de rang $2n$.

$\boxed{Q\ 1}$

a. Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker} f$.
b. On note $g = f_{|\operatorname{Im} f}$ la restriction de g au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$. Vérifier que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.
c. En déduire que $\operatorname{rg}(f^2) \geq n$.

On suppose désormais de plus que $f^3 = 0_{L(E)}$.

$\boxed{Q\ 2}$

a. Déterminer $rg(f^2)$.
b. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f^2)$ dans E. Justifier que $\dim(S) = n$.

$\boxed{Q\ 3}$ On suppose que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de S.

a. Montrer que $b = \big(e_1, \dots, e_n, f(e_1), \dots, f(e_n), f^2(e_1), \dots, f^2(e_n)\big)$ est une base de E.
b. Écrire la matrice de f dans la base b.

2 Exercice 2

Dans tout l'exercice, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$, et on note $u \in L(E)$ l'unique endomorphisme ayant A pour matrice dans la base ε.

2.1 Étude de la matrice A

$\boxed{Q\ 4}$

a. Déterminer le rang de la matrice A.
b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
a. Déterminer $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}_E)$.

$\boxed{Q\ 5}$ On définit les deux matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Montrer qu'il existe une base $e = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que $P = P_{\varepsilon \mapsto e}$ soit la matrice de passage de la base ε vers la base e. Vérifier que $D = \operatorname{Mat}_e(u)$.
b. Écrire la relation entre les matrices A, D et P.

$\boxed{Q\ 6}$ Calculer la matrice P^{-1}.

$\boxed{Q\ 7}$ Soit une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $(MD = DM) \iff (D \text{ diagonale})$

2.2 Résolution de $X^2 = A$

On se propose dans cette partie de résoudre l'équation du second degré $X^2 = A$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, c'est à dire déterminer toutes les matrices $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $X^2 = A$.

$\boxed{Q\ 8}$ Soit une matrice $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On note $Y = P^{-1}XP$. Déterminer une condition (C) sur Y équivalente à $X^2 = A$.

$\boxed{Q\ 9}$ Montrer que si Y vérifie la condition (C), alors $YD = DY$. En déduire que les matrices Y vérifiant (C) sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda,\mu \in \{-1,1\}$.

$\boxed{Q\ 10}$ En déduire les matrices $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $X^2 = A$.

$\boxed{Q\ 11}$

a. Déterminer le nombre m de solutions de l'équation $X^2 = A$.
b. Déterminer sans calcul la somme de ces m solutions, $S = X_1 + \cdots + X_m$.
c. Justifier sans calcul que deux solutions X et X' commutent.
d. Déterminer le produit de toutes les solutions $T = X_1 \dots X_m$ en fonction de A.

2.3 Calcul du commutant de A

On note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice A.

$\boxed{Q\ 12}$ Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

$\boxed{Q\ 13}$ Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

$\boxed{Q\ 14}$ En déduire que $\mathcal{C}(A)$ est l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $aM_1 + bM_2 + cM_3$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ où M_1, M_2 et M_3 sont trois matrices que l'on déterminera.

$\boxed{Q\ 15}$ Calculer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$.

2.4 Un système différentiel

On veut déterminer les applications dérivables x,y,z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) &= 16x(t) + 4y(t) - 4z(t) \\ y'(t) &= -18x(t) - 4y(t) + 5z(t) \\ z'(t) &= 30x(t) + 8y(t) - 7z(t) \end{cases} \tag{1}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 2$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 2$.

$\boxed{Q\ 16}$ Pour trois applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ et } X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

a. Donner une relation matricielle entre $X'(t)$ et $X(t)$ équivalente au système (1).
b. Trouver la solution du problème posé.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$

a. Écrivons la formule du rang pour $f : E \mapsto E$: $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f)$. On en tire que $\dim(\operatorname{Ker} f) = n$.

b. Montrons que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f^2$. $\subset$: soit $z \in \operatorname{Im} g$, il existe $y \in \operatorname{Im} f$ tel que $z = g(y) = f(y)$. Mais comme $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $z = f^2(x) \in \operatorname{Im} f^2$. $\supset$: soit $z \in \operatorname{Im} f^2$. Posons $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$. On a alors $z = f(y) = g(y) \in \operatorname{Im} g$.
On sait que $\operatorname{Ker} f_{|F} = \operatorname{Ker} f \cap F$ (le vérifier ici à la main).

c. Écrivons la formule du rang pour $g : \operatorname{Im} f \mapsto E$:

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg}(g)$$

Mais $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et donc $\dim \operatorname{Ker} g \leq \dim \operatorname{Ker} f = n$. On en tire que $\operatorname{rg}(f) \leq n + \operatorname{rg}(g)$ d'où $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(g) \geq 2n - n = n$.

$\boxed{Q\ 2}$

a. Puisque $f^3 = f \circ f^2 = 0_{L(E)}$, on montre facilement que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ et donc que $\operatorname{rg}(f^2) \leq \dim \operatorname{Ker} f = n$. Comme on a déjà vu que $\operatorname{rg}(f^2) \geq n$, on en déduit que $\boxed{\operatorname{rg} f^2} = n$.

b. Puisque $E = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus S$, d'après la formule sur la dimension d'une somme directe, on tire que $3n = \dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim S$. Mais d'après la formule du rang pour $f^2 : E \mapsto E$, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f^2 + \operatorname{rg}(f^2)$ d'où $\dim(\operatorname{Ker} f^2) = 2n$. Finalement, $\boxed{\dim S = 3n - 2n = n}$.

$\boxed{Q\ 3}$

a. D'après le théorème de la base adaptée à une somme directe, il suffit de vérifier que le système $\big(f(e_1), \dots, f(e_n), f^2(e_1), \dots, f^2(e_n)\big)$ est une base de $\operatorname{Ker} f^2$. Puisque $f^3 = 0_{L(E)}$, il est clair que chacun de ces vecteurs est dans $\operatorname{Ker} f^2$. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{2n}$ tels que

$$\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) + \mu_1 f^2(e_1) + \cdots + \mu_n f^2(e_n) = 0_E \tag{2}$$

En appliquant f, on trouve que $\lambda_1 f^2(e_1) + \cdots + \lambda_n f^2(e_n) = 0_E$, c'est à dire que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in \operatorname{Ker} f^2$, mais puisque les e_i sont des vecteurs de S, $x \in \operatorname{Ker} f^2 \cap S = \{0_E\}$, $x = 0_E$. Comme le système $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de S donc libre, il vient que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. En appliquant ensuite f à l'égalité 2, et en refaisant le même raisonnement, on montre que $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0_{\mathbb{K}}$.

b. Puisque $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f\big(f(e_k)\big) = f^2(e_k)$ et $f\big(f^2(e_k)\big) = f^3(e_k) = 0_E$, on trouve que

$$\operatorname{Mat}_b(f) = \begin{pmatrix}
0 & & & & \dots & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & \\
1 & \ddots & & & & & & & \\
0 & \ddots & 0 & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & & \\
\vdots & & & 1 & \ddots & & & & \\
 & & & & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & & \dots & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

$\boxed{Q\ 4}$

a. En faisant tourner l'algorithme du rang, par exemple avec les opérations $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$, $C_1 \leftarrow C_1 - 4C_2$, $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3$, on trouve que $\operatorname{rg}(A) = 2$.

b. On en déduit grâce à la formule du rang que $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$. Soit $\alpha = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} u$. En notant $X = \operatorname{Mat}_\varepsilon(\alpha)$, on doit avoir $AX = 0$, et en résolvant ce système, on trouve que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}((1,-2,2))$.

c. La matrice de $u - \mathrm{id}_E$ dans la base ε est $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 4 & -4 \\ -18 & -5 & 5 \\ 30 & 8 & -8 \end{pmatrix}$. En résolvant le système $BX = 0$, on trouve que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Vect}((0,1,1))$.

$\boxed{Q\ 5}$

a. Il suffit de poser les vecteurs $e_1 = (1,-2,2)$, $e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (-1,1,-2)$. La matrice du système (e_1,e_2,e_3) dans la base canonique est P. Avec l'algorithme du rang, on vérifie que $\operatorname{rg}(P) = 3$, c'est à dire que P est inversible. On sait alors que e est une base de E, et que $P = P_{\varepsilon \mapsto e}$. On calcule $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = (0,1,1) = e_2$ et $u(e_3) = (-4,4,-8) = 4e_3$ et donc $\operatorname{Mat}_e(u) = D$. Puisque les deux matrices A et D représentent le même endomorphisme dans les base ε et e, ces matrices sont semblables : $\operatorname{Mat}_\varepsilon(u) = P_{\varepsilon\mapsto e} \operatorname{Mat}_e(u) P_{e\mapsto\varepsilon}$ c'est à dire $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

$\boxed{Q\ 6}$ Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Résolvons le système $PX = B$. On trouve que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{Q\ 7}$ Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$. On calcule $MD = \begin{pmatrix} 0 & d & 4g \\ 0 & e & 4h \\ 0 & f & 4i \end{pmatrix}$ et $DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & e & h \\ 4c & 4f & 4i \end{pmatrix}$. Par conséquent, si $MD = DM$, il faut que $d = b = g = c = f = h = 0$, c'est à dire que M est une matrice diagonale. Réciproquement, une matrice diagonale commute avec toute matrice diagonale.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrons que $\underset{(i)}{\left(X^2 = A\right)} \iff \underset{(ii)}{\left(Y^2 = D\right)}$. $(i) \Rightarrow (ii)$: calculons $Y^2 = P^{-1}X^2P = P^{-1}AP = D$. $(ii) \Rightarrow (i)$: puisque $X = PYP^{-1}$, $X^2 = PY^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

$\boxed{Q\ 9}$ Soit une matrice Y vérifiant $Y^2 = D$. On calcule $YD = YY^2 = Y^2Y = DY$. D'après la question 7, on sait alors que Y est diagonale : $Y = \operatorname{Diag}(a,b,c)$. On a alors $Y^2 = \operatorname{Diag}(a^2,b^2,c^2) = \operatorname{Diag}(0,1,4)$ et donc $a = 0$, $b = \pm 1$, $c = \pm 2$. Il suffit de poser $\lambda = \operatorname{sg}(b)$ et $\mu = \operatorname{sg}(c)$, on a $Y = \operatorname{Diag}(0,\lambda,2\mu)$. Réciproquement, si $\lambda,\mu \in \{-1,1\}$, on vérifie que $Y = \operatorname{Diag}(0,\lambda,\mu)$ est telle que $Y^2 = D$.

$\boxed{Q\ 10}$ Ce sont les matrices de la forme

$$X = PYP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ -8 & -2 & 2 \\ 16 & 4 & -4 \end{pmatrix}}_{M'}$$

avec $\lambda,\mu \in \{-1,1\}$.

$\boxed{Q\ 11}$

a. Il y a autant de solutions que de couples $(\lambda,\mu) \in \{-1,1\}^2$, c'est à dire 4.

b. $S = (M + M') + (M - M') + (-M + M') + (-M - M') = 0$.

c. Soient deux solutions X, X', et les matrices $Y = P^{-1}XP$, $Y' = P^{-1}X'P$ associées. On calcule $XX' = PYP^{-1}PY'P^{-1} = PYY'P^{-1}$. Puisque Y, Y' sont des matrices diagonales, elles commutent. Donc $XX' = PY'YP^{-1} = PY'P^{-1}PYP^{-1} = X'X$.

d. En notant Y_i les matrices $Y_i = P^{-1}X_iP$, on calcule $X_1X_2X_3X_4 = P^{-1}Y_1Y_2Y_3Y_4P$ mais les matrices Y_i sont diagonales, leur produit fait apparaître le produit des éléments diagonaux, $Y_1Y_2Y_3Y_4 = \operatorname{Diag}(0,1,16) = D^2$ Par conséquent $\boxed{X_1X_2X_3X_4 = P^{-1}D^2P = A^2}$.

$\boxed{Q\ 12}$ Vérification simple, on montre que $0_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})}, I_3 \in \mathcal{C}(A)$ que $\mathcal{C}(A)$ est stable par combinaisons linéaires et par produit.

$\boxed{Q\ 13}$ Soit $M \in \mathcal{C}(A)$. Posons $N = P^{-1}MP$, puisque $A = PDP^{-1}$ et $M = PNP^{-1}$, comme $AM = MA$, on trouve que $DN = ND$ et d'après la question 7, la matrice N doit être diagonale. On vérifie réciproquement que si N est diagonale, puisqu'elle commute avec D, $AM = MA$.

$\boxed{Q\ 14}$ Considérons une matrice diagonale $N = \mathrm{Diag}(a,b,c)$ et calculons $PNP^{-1} = aM_1 + bM_2 + cM_3$ où :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

D'après la question précdédente, $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(a,b,c)$, c'est à dire $M = P\mathrm{Diag}(a,b,c)P^{-1}$, c'est à dire $M \in \mathrm{Vect}(M_1,M_2,M_3)$.

$\boxed{Q\ 15}$ On a trouvé un système générateur (M_1,M_2,M_3) de $\mathcal{C}(A)$. On vérifie facilement qu'il est libre, c'est donc une base de $\mathcal{C}(A)$ et donc $\boxed{\dim \mathcal{C}(A) = 3}$.

$\boxed{Q\ 16}$

a. On vérifie que $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$ est équivalente au système (1).

b. Posons pour $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Puisque $A = PDP^{-1}$, on doit avoir $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = PDP^{-1}X(t)$, c'est à dire $P^{-1}X'(t) = DY(t)$. Mais en notant $Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{pmatrix}$, on vérifie facilement que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$. Les trois fonctions $a(t),b(t),c(t)$ doivent donc vérifier le système $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a'(t) &= 0 \\ b'(t) &= b(t) \\ c'(t) &= 4c(t) \end{cases} \tag{3}$$

avec $\begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \\ c(0) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$. On trouve alors que $a(t) = -5$, $b(t) = -2e^t$ et $c(t) = -7e^{4t}$, puis que $X(t) = PY(t)$, et après calculs que

$$\boxed{\begin{cases} x(t) &= -5 + 7e^{4t} \\ y(t) &= 10 - 2e^t - 7e^{4t} \\ z(t) &= -10 - 2e^t + 14e^{4t} \end{cases}}$$