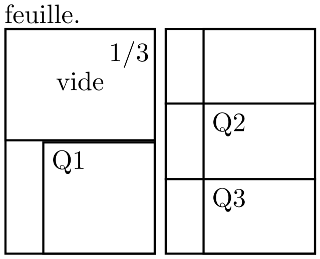
MPSI 2
DS 06

le 05 Février 2003

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

Dans le problème, on notera $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On identifiera les polynômes et les fonctions polynômiales associées.

1 Polynômes de Tchebychev

$\boxed{Q\ 1}$ Montrer qu'il existe un polynôme T_n à coefficients entiers vérifiant :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \tag{1}$$

$\boxed{Q\ 2}$ Expliciter les polynômes T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4.

$\boxed{Q\ 3}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \tag{2}$$

$\boxed{Q\ 4}$ En déduire le degré et le coefficient dominant du polynôme T_n.

$\boxed{Q\ 5}$ Écrire une procédure Maple `tchebychev : n : int, x : float` qui retourne le réel $T_n(x)$ pour $n \geq 2$.

$\boxed{Q\ 6}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, les polynômes T_n et T_{n+1} sont premiers entre eux.

2 Calcul de normes

Pour un polynôme $P \in E$, on note

$$\|P\| = \sup_{x\in[-1,1]} \big|P(x)\big|$$

$\boxed{Q\ 7}$ Vérifier que :

a. $\|P\|$ est bien défini.
b. $\forall (P,Q) \in E^2$, $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$
c. $\forall P \in E$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda.P\| = |\lambda|\|P\|$
d. $\forall P \in E$, $\|P\| = 0 \Longleftrightarrow P = 0_E$.

On dit que $\|.\|$ définit une *norme* sur l'espace E.

$\boxed{Q\ 8}$ Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n\|$.

$\boxed{Q\ 9}$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\big|\sin(nu)\big| \leq n\big|\sin(u)\big|$.
b. En déduire que $\|T_n'\| \leq n^2$.

$\boxed{Q\ 10}$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall r \in \mathbb{R}^\star$, $T_n\Big(\dfrac{r + r^{-1}}{2}\Big) = \dfrac{r^n + r^{-n}}{2}$

b. Soit un réel $x \in [1, +\infty[$. Montrer qu'il existe un réel $r \geq 1$ tel que $x = \dfrac{r + r^{-1}}{2}$.

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \geq 1, \quad 1 \leq T_n(x) \leq \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n \tag{3}$$

$\boxed{Q\ 11}$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 T_n - X T_n' + (1 - X^2) T_n'' = 0 \tag{4}$$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$,

$$(n^2 - k^2) T_n^{(k)} - (2k+1) X T_n^{(k+1)} + (1 - X^2) T_n^{(k+2)} = 0 \tag{5}$$

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$,

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2^k k!}{(2k)!} \tag{6}$$

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n^{(k)}(1)$.

3 Majoration d'un polynôme sur $[1, +\infty[$

Pour un entier $n \geq 2$, on définit pour $j \in [\![0,n]\!]$, $a_j = \cos\left[\left(1 - \frac{j}{n}\right)\pi\right]$. On obtient ainsi une subdivision $-1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ du segment $[-1,1]$. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on définit le ième polynôme de Lagrange

$$L_i = \prod_{\substack{j \in [\![0,n]\!] \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

$\boxed{Q\ 12}$

a. Déterminer les réels $x \in [-1,1]$ vérifiant $\left|T_n(x)\right| = 1$.

b. Calculer $T_n'(a_j)$ pour $j = n$, $j = 0$ puis pour $j \in [\![1,n-1]\!]$.

$\boxed{Q\ 13}$

a. Montrer que pour tout polynôme $P \in E_n$,

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i \tag{7}$$

b. Montrer que

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} L_i \tag{8}$$

c. Soit $x \in [1, +\infty[$. Montrer que

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left|L_i(x)\right| \tag{9}$$

d. Soit un polynôme $P \in E_n$. Montrer que

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \left|P(x)\right| \leq \|P\| \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n \tag{10}$$

$\boxed{Q\ 14}$

a. Montrer que

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in [1, +\infty[, \quad T_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left|L_i^{(k)}(x)\right| \tag{11}$$

b. Soit un polynôme $P \in E_n$. Montrer que

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in [1, +\infty[, \quad \left|P^{(k)}(x)\right| \leq \|P\|\ T_n^{(k)}(x) \tag{12}$$

4 Majoration des dérivées d'un polynôme sur $[-1,1]$

Soit un entier $n \geq 2$ et un polynôme $P \in E_n$. On considère un entier $k \in [\![1,n]\!]$. Pour $\lambda \in [-1,1]$, on définit le polynôme

$$P_\lambda = P\Big(\frac{\lambda + \varepsilon}{2} X + \frac{\lambda - \varepsilon}{2}\Big) \tag{13}$$

où $\varepsilon = +1$ si $\lambda \in [0,1]$ et $\varepsilon = -1$ si $\lambda \in [-1,0[$.

$\boxed{Q\ 15}$ Montrer que

$$\left|P_\lambda^{(k)}(1)\right| = \Big(\frac{|\lambda| + 1}{2}\Big)^k \left|P^{(k)}(\lambda)\right| \tag{14}$$

$\boxed{Q\ 16}$ En déduire que

$$\|P^{(k)}\| \leq 2^{2k} \frac{k!}{(2k)!} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \|P\| \tag{15}$$

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ C'est un calcul trigonométrique fait en cours. On trouve que

$$\boxed{T_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{n-k} (1-X^2)^k}$$

$\boxed{Q\ 2}$ On trouve que $\boxed{T_0 = 1}$, $\boxed{T_1 = X}$, $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1}$, $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$ et $\boxed{T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1}$.

$\boxed{Q\ 3}$ Posons $H = T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n \in E$. Soit $x \in [-1,1]$, $\exists \theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$. Alors

$$\begin{aligned} H(x) &= T_{n+2}(\cos\theta) - 2\cos\theta T_{n+2}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta) \\ &= \cos[(n+2)\theta] - 2\cos\theta\cos[(n+1)\theta] + \cos(n\theta) \end{aligned}$$

Mais puisque $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, il vient que $H(x) = 0$, ce qui montre que le polynôme H possède une infinité de racines. Il est donc nul d'après un théorème.

$\boxed{Q\ 4}$ Par récurrence, on montre en utilisant la relation 2 que $\deg T_n = n$ et que son coefficient dominant vaut 2^{n-1}.

$\boxed{Q\ 5}$ On utilise la relation 2, et l'invariant de boucle placé en commentaire :

```
tchebychev := proc(n, x)
  local P, PP;
  P := 1;
  PP := x;
  for i from 2 to n do
    temp := PP;
    PP := 2 * x * PP - P;
    P := temp;
    # INV : P = T_{i-1}(x), PP = T_i(x)
  od;
  PP;
end;
```

$\boxed{Q\ 6}$ Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$: $T_n \wedge T_{n+1} = 1$. Puisque $T_0 = 1$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. D'après $\mathcal{P}(n)$ et le théorème de Bezout, il existe deux polynômes $(U,V) \in E^2$ tels que $UT_n + VT_{n+1} = 1$. En multipliant la relation 2 par U on obtient alors

$$UT_{n+2} = 2XUT_{n+1} - UT_n = 2XUT_{n+1} - (1 - VT_{n+1})$$

ce qui donne

$$(2XU + V)T_{n+1} - UT_{n+2} = 1$$

et d'après Bezout, on en déduit que T_{n+1} et T_{n+2} sont premiers entre eux.

$\boxed{Q\ 7}$

a. La fonction polynômiale $x \mapsto |P(x)|$ est continue sur le segment $[-1,1]$. D'après un théorème elle est bornée et atteint ses bornes. Par conséquent, $\|T_n\|$ est bien définie.

b. Soit $x \in [-1,1]$. Utilisons l'inégalité triangulaire :

$$|(P+Q)(x)| = |P(x) + Q(x)| \le |P(x)| + |Q(x)| \le \|P\| + \|Q\|$$

Par passage à la borne sup. on en déduit le résultat.

c. Soit $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 0$, le résultat est clair. Supposons donc $\lambda \neq 0$. Soit $x \in [-1,1]$. Puisque

$$\left|(\lambda.P)(x)\right| = \left|\lambda\right|\left|P(x)\right| \le \left|\lambda\right|\|P\|$$

par passage à la borne sup., on en déduit que $\|\lambda.P\| \leq |\lambda|\|P\|$. Puisque $\lambda \neq 0$, on peut écrire

$$|P(x)| = \frac{1}{|\lambda|}|(\lambda.P)(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda P\|$$

Par passage à la borne supérieure, on en déduit que

$$\|P\| \leq \frac{1}{\lambda}\|\lambda.P\|$$

d'où le résultat.

d. Soit $P \in E$. Si $P = 0_E$, il est clair que $\|P\| = 0$. Supposons que $\|P\| = 0$. Alors $\forall x \in [-1,1]$, $P(x) = 0$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines. D'après un théorème, il est nul.

Q 8

- Montrons que $\|T_n\| \leq 1$. Soit $x \in [-1,1]$. Il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$. Alors $|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos(n\theta)| \leq 1$. Par passage à la borne sup, on obtient $\|T_n\| \leq 1$.
- Puisque $|T_n(1)| = |T_n(\cos 0)| = |\cos(n \times 0)| = 1$, on obtient $\|T_n\| \geq 1$.

En conclusion, $\boxed{\|T_n\| = 1}$.

Q 9

a. Par récurrence sur n. $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée. Montrons $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Soit $u \in \mathbb{R}$. Écrivons

$$\begin{aligned}
|\sin[(n+1)u]| &= |\sin(nu)\cos u + \sin u\cos(nu)| \\
&\leq |\sin(nu)||\cos u| + |\sin(u)||\cos(nu)| \\
&\leq n|\sin(u)| + |\sin(u)| \quad (\text{ d'après } \mathcal{P}(n)) \\
&= (n+1)|\sin u|
\end{aligned}$$

b. En dérivant la relation 1, on tire :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ T_n'(\cos\theta)\sin\theta = n\sin(n\theta)$$

Soit $x \in]-1,1[$. Il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$. Alors en utilisant a,

$$|T_n'(x)||\sin\theta| = n|\sin(n\theta)| \leq n^2|\sin\theta|$$

Comme $x \in]-1,1[$, $\theta \in]0,\pi[$ et donc $\sin\theta \neq 0$. On a alors $|T_n'(x)| \leq n^2$. Comme la fonction T_n' est continue aux points 1 et -1, par passage à la limite dans les inégalités, cette inégalité reste valable pour $x \in [-1,1]$. En conclusion, $\|T_n'\| \leq 1$.

Q 10

a. Par récurrence forte :

$$\mathcal{P}(n)\ : T_n\Big(\frac{r+r^{-1}}{2}\Big) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}$$

$\mathcal{P}(0)$ est claire. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Calculons

$$\begin{aligned}
&2\Big(\frac{r+r^{-1}}{2}\Big)T_{n+1}\Big(\frac{r+r^{-1}}{2}\Big) - T_n\Big(\frac{r+r^{-1}}{2}\Big) \\
&= (r+r^{-1})\frac{r^{n+1}+r^{-(n+1)}}{2} - \frac{r^n + r^{-n1}}{2} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n),\mathcal{P}(n+1) \\
&= \frac{r^{n+2}+r^{-(n+2)}}{2}
\end{aligned}$$

b. En étudiant les variations de la fonction $\phi : \begin{cases} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & \dfrac{r+r^{-1}}{2} \end{cases}$ on montre que ϕ réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ vers l'intervalle $[1,+\infty[$. Si $x \in [1,+\infty[$, $\exists! r \in [1,+\infty[$ tel que $x = \phi(r)$. En résolvant l'équation du second degré $x = \dfrac{r+r^{-1}}{2}$, on trouve ses deux racines $r_1 = x + \sqrt{x^2-1}$ et $r_2 = x - \sqrt{x^2-1}$. Puisque $r_1 \times r_2 = 1$, l'une est ≥ 1 et l'autre ≤ 1. Comme $x_1 \geq x_2$, il vient que

$$\boxed{r = x + \sqrt{x^2-1}}$$

c. Soit $x \geq 1$. Posons $r = x + \sqrt{x^2-1} \geq 1$. On a $x = \dfrac{r+r^{-1}}{2}$ et d'après a),

$$T_n(x) = T_n\Big(\frac{r+r^{-1}}{2}\Big) = \frac{r^n + r^{-n}}{2} \geq \frac{1+1}{2} = 1$$

Et puisque $r \geq 1$, $r^{-n} \leq r^n$, ce qui donne

$$T_n(x) = \frac{r^n + r^{-n}}{2} \leq r^n = (x + \sqrt{x^2-1})^n$$

$\boxed{Q\ 11}$

a. En dérivant deux fois la relation 1, on trouve que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -T_n''(\cos\theta)\sin^2\theta + T_n'(\cos\theta)\cos\theta = n^2\cos(n\theta)$$

Soit $x \in [-1,1]$, $\exists! \theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$. Alors

$$T_n''(x)(1-x^2) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

Posons $H = n^2T_n - XT_n' + (1-X^2)T_n'$. On vient de montrer que le polynôme H possédait une infinité de racines. D'après un théorème, c'est le polynôme nul, d'où la relation de l'énoncé.

b. Dérivons k fois la relation 4 à l'aide de la formule de Leibniz :

$$n^2T_n^{(k)} - \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X^{(j)}T_n^{(k-j+1)} + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}[1-X^2]^{(j)}T_n^{(k-j+2)} = 0$$
$$n^2T_n^{(k)} - XT_n^{(k+1)} - kT_n^{(k)} + (1-X^2)T_n^{(k+2)} - 2kXT_n^{(k+1)} - k(k-1)T_n^{(k)} = 0$$
$$(n^2-k^2)T_n^{(k)} - (2k+1)XT_n^{(k+1)} + (1-X^2)T_n^{(k+2)} = 0$$

c. Par récurrence sur k. Montrons $\mathcal{P}(0)$. Puisque $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, pour $\theta = 0$, on trouve que $T_n(1) = 1$ et on a bien $\dfrac{n}{n+0}\dfrac{n!}{n!}\dfrac{2^0 0!}{0!} = 1$.
Montrons $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$. Supposons $k+1 \leq n$. D'après la formule 5, en prenant $x=1$, on trouve que

$$(n^2-k^2)T_n^{(k)}(1) - (2k+1)T_n^{(k+1)}(1) = 0$$

Alors :

$$\begin{aligned}
T_n^{(k+1)}(1) &= \frac{(n-k)(n+k)}{2k+1}T_n^{(k)}(1) \\
&= \frac{(n-k)(n+k)}{2k+1}\frac{n}{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{2^k k!}{(2k)!} \quad (\text{ d'après } \mathcal{P}(k)) \\
&= n\frac{(n+k)!}{[n-(k+1)]!}2^k k!(2k+1)! \\
&= \frac{n}{n+k+1}\frac{(n+k+1)!}{[n-(k+1)]!}\frac{2^{k+1}(k+1)!}{(2k+1)!2(k+1)} \\
&= \frac{n}{n+k+1}\frac{(n+k+1)!}{[n-(k+1)]!}\frac{2^{k+1}(k+1)!}{[2(k+1)]!}
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(k+1)$.

d. On montre par récurrence en utilisant la relation 1 que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ (le polynôme T_n est pair si n est un entier pair et impair si n est impair). En dérivant k fois cette relation, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (-1)^k T_n^{(k)}(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

et pour $x = 1$, on en tire que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n(1)$.

$\boxed{Q\ 12}$

a. Soit $x \in [-1,1]$ tel que $\left|T_n(x)\right| = 1$. Il existe un unique réel $\theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$. Alors $\left|T_n(\cos\theta)\right| = \left|\cos(n\theta)\right| = 1$ et donc $\exists j \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = j\pi$, c'est à dire $\theta = \dfrac{k\pi}{n}$. Puisque $\theta \in [0,\pi]$, on doit avoir $j \in [\![0,n]\!]$ et donc $x \in \left\{a_j ; j \in [\![0,n]\!]\right\}$. On vérifie réciproquement que $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $|T_n(a_j)| = 1$.

b. $T_n'(a_n) = T_n'(1) = n^2$ et $T_n'(a_0) = T_n'(-1) = (-1)^{n+1} n^2$ d'après la relation 6. En dérivant la relation 1, on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n'(\cos\theta)\sin\theta = n\sin(n\theta)$$

Soit $j \in [\![1,n-1]\!]$. En prenant $\theta = (1 - j/n)\pi$ dans la relation précédente, on trouve que

$$T_n'(a_j)\sin(\pi - \pi j/n) = n\sin(n\pi - j\pi) = 0$$

Puisque $\sin(\pi - \pi j/n) = -\sin(\pi j/n) \neq 0$, on en déduit que $\boxed{T_n'(a_j) = 0}$.

$\boxed{Q\ 13}$

a. $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\deg L_i = n$ et $L_i(a_j) = \delta_{ij}$. Posons

$$H = P - \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$$

On a $\deg H \le n$ et $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $H(a_j) = P(a_j) - \sum_{j=0}^{n} P(a_j)\delta_{ij} = P(a_i) - P(a_i) = 0$ Le polynôme H admet donc au moins $n+1$ racines distinctes. D'après un théorème, il est nul d'où l'égalité demandée.

b. On calcule $T_n(a_i) = \cos((n-i)\pi) = (-1)^{n-i}$. Par conséquent, en reportant dans la relation 8,

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} L_i$$

b. Soit $x \ge 1$, $a_0 < \dots < a_i < \dots < a_n = 1 \le x$ Par conséquent, $(x - a_0)\dots(x - a_n) \ge 0$. D'autre part, puisque $(a_i - a_0) \ge 0 \dots (a_{i-1} - a_0) \ge 0$, $(a_i - a_{i+1}) < 0 \dots (a_i - a_n) < 0$, le signe de $L_i(x)$ vaut $(-1)^{n-i}$. Donc $L_i(x) = (-1)^{n-i}\left|L_i(x)\right|$. Finalement, en utilisant l'identité 9,

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}(-1)^{n-i}\left|L_i(x)\right| = \sum_{i=0}^{n}\left|L_i(x)\right|$$

c. Soit $x \ge 1$. Majorons :

$$\left|P(x)\right| \le \sum_{i=0}^{n}\left|P(a_i)\right|\left|L_i(x)\right| \le \|P\| \sum_{i=0}^{n}\left|L_i(x)\right|$$

En effet, puisque $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $a_i \in [-1,1]$ et donc $\left|P(a_i)\right| \le \|P\|$. En utilisant la relation 7 et la question 10c, on trouve que

$$\left|P(x)\right| \le \|P\|(x + \sqrt{x^2 - 1})^n$$

$\boxed{Q\ 14}$

a. En dérivant k fois la relation 8, on obtient :

$$T_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}L_i^{(k)}$$

Mais si l'on dérive k fois le polynôme L_i, les termes au numérateur sont des produits de $(X-a_i)$ et sont tous positifs pour $x \geq 1$, et on a vu que la constante $(a_i-a_0)\dots(a_i-a_n)$ était du signe de $(-1)^{n-i}$. Par conséquent, pour $x \geq 1$, $L_i^{(k)}(x) = (-1)^{n-i}\left|L_i^{(k)}(x)\right|$ et il suffit de remplacer $L_i^{(k)}$ dans la relation ci-dessus pour obtenir le résultat.

b. Puisque $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i$, en dérivant k fois, on trouve que $P^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i^{(k)}$ et si $x \geq 1$, en majorant,

$$\begin{aligned}\left|P^{(k)}(x)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i^{(k)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n}\left|P(a_i)\right|\left|L_i^{(k)}(x)\right| \\ &\leq \|P\| \ \sum_{i=0}^{n}\left|L_i^{(k)}(x)\right| \\ &\leq \|P\| \ T_n^{(k)}(x)\end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 15}$ Dérivons k fois la formule 13 :

$$P_\lambda^{(k)}(X) = \Bigl(\frac{\lambda+\varepsilon}{2}\Bigr)^k P\Bigl(\frac{\lambda+\varepsilon}{2}X + \frac{\lambda-\varepsilon}{2}\Bigr)$$

En faisant $x=1$, on trouve

$$P_\lambda^{(k)}(1) = \Bigl(\frac{\lambda+\varepsilon}{2}\Bigr)^k P(\lambda)$$

Il suffit de remarquer que si $\lambda \in [-1,0[$, $\Bigl(\frac{\lambda+\varepsilon}{2}\Bigr)^k = (-1)^k\Bigl(\frac{|\lambda|+1}{2}\Bigr)^k$. En prenant la valeur absolue, on trouve la majoration demandée.

$\boxed{Q\ 16}$ Soit $\lambda \in [-1,1]$. D'après la question précédente,

$$\left|P^{(k)}(\lambda)\right| = \Bigl(\frac{2}{|\lambda|+1}\Bigr)^k\left|P_\lambda^{(k)}(1)\right|$$

Utilisons la majoration 12 avec $x=1$ et $P=P_\lambda$. Puisque $|\lambda|+1 \geq 1$, on en tire :

$$\left|P^{(k)}(\lambda)\right| \leq 2^k\|P_\lambda\| \ T_n^{(k)}(1)$$

Il suffit ensuite de remarquer que $\|P_\lambda\| = \|P\|$. En effet, si $\lambda \in [-1,1]$, et si $x \in [-1,1]$, on montre par des inégalités que $\frac{\lambda+\varepsilon}{2}x + \frac{\lambda-\varepsilon}{2} \in [-1,1]$. On en déduit que

$$\left|P^{(k)}(\lambda)\right| \leq 2^k\|P\| \ T_n^{(k)}(1)$$

et en utilisant la formule 6, on trouve la majoration demandée.