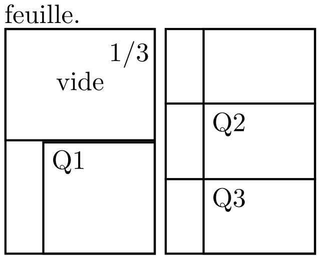
MPSI 2
DS 07

le 12 mars 2003

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

Les calculatrices sont interdites

On note $E=\mathcal{C}([-1,\infty[)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $I=]-1,+\infty[$. Étant donné un élément f de E, on désigne par $T(f)$ l'application de I vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in I,\quad T(f)(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1 Quelques exemples

$\boxed{Q\ 1}$ Déterminer l'application $T(f)$ lorsque f est l'application constante égale à $a\in\mathbb{R}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Déterminer l'application $T(f)$ lorsque f est l'application $f:\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(t+1)\end{array}\right.$.

$\boxed{Q\ 3}$ Déterminer l'application $T(f)$ lorsque

$$f:\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{(t+2)^2}\end{array}\right.$$

et donner un développement asymptotique à la précision $o(1/x^2)$ de $T(f)(x)$ au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{Q\ 4}$ Déterminer l'application $T(f)(x)$ lorsque

$$f:\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^2}{(t^2+1)^2}\end{array}\right.$$

$\boxed{Q\ 5}$ Pour tout entier n non nul, on définit l'élement $f_n\in E$ par $\forall t\in I,\ f_n(t)=t^n$. Soit $x\in I$. Trouver une relation entre $T(f_{n+1})(x)$ et $T(f_n)(x)$ et en déduire l'expression de $T(f_n)(x)$ à l'aide d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

$\boxed{Q\ 6}$ Vérifier que T définit un endomorphisme de E et déterminer son noyau et son image.

2 Étude d'un exemple

Cette partie est consacrée à l'étude de la fonction $T(f)$ lorsque $f:\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-t}\end{array}\right.$. Ainsi, $\forall x\in I$, $T(f)(x)=\int_0^x \dfrac{e^{-t}}{t+1}\,\mathrm{d}t$. On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

$\boxed{Q\ 7}$ Déterminer le sens de variations de la fonction $T(f)$.

$\boxed{Q\ 8}$ Trouver le développement limité de $T(f)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. Utiliser ce calcul pour en déduire l'allure locale de la courbre représentative de $T(f)$ au voisinage de 0.

$\boxed{Q\ 9}$ Montrer que la fonction $T(f)$ admet une limite finie L lorsque $x \to +\infty$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

$\boxed{Q\ 10}$ Déterminer la limite de $T(f)$ lorsque $x \to -1^+$.

$\boxed{Q\ 11}$ Donner l'allure de la représentation graphique de $T(f)$ en faisant apparaître sur le dessin les résultats des questions précédentes.

3 Comportement à l'infini

On considère un élément $f \in E$ et on suppose que f admet une limite réelle λ lorsque $t \to +\infty$. Nous allons étudier le comportement de la fonction $T(f)$ en $+\infty$.

$\boxed{Q\ 12}$ On suppose dans cette question que $\lambda = 0$.

a. Montrer que la fonction f est bornée sur l'intervalle $J = [0, +\infty[$. On notera $M = \sup_{t\in[0,+\infty[} |f(t)|$.

b. Pour $x \geq 1$, on pose $\alpha(x) = \sup\{|f(t)| \mid \ln(x) \leq t \leq x\}$. Montrer que $\alpha(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

c. Montrer que $\forall x \geq 1$,

$$\left|T(f)(x)\right| \leq M \int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

d. En déduire que $T(f)(x) = o(\ln x)$ au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{Q\ 13}$ On suppose dans cette question que $\lambda \neq 0$. Trouver un équivalent simple de $T(f)(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

$\boxed{Q\ 14}$ On suppose dans cette question que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $T(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

$\boxed{Q\ 15}$ On considère dans cette question l'élément $f \in E$ défini par $\forall t \in I,\ f(t) = e^t$ et donc, $\forall x \in I$,

$$T(f) = \int_0^x \frac{e^t}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale. On note pour $n \geq 2$,

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

a. En écrivant pour $n \geq 2$, et $x \geq 0$, $F_n(x) = \int_0^{x/2} \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t + \int_{x/2}^{x} \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t$, montrer que $F_n(x) = o(\frac{e^x}{x^{n-2}})$ au voisinage de $+\infty$.

b. En intégrant $F_n(x)$ par parties, montrer que $F_n(x) = o(\frac{e^x}{x^{n-1}})$ au voisinage de $+\infty$.

c. Trouver trois constantes $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ telles qu'au voisinage de $+\infty$,

$$T(f)(x) = a\frac{e^x}{x} + b\frac{e^x}{x^2} + c\frac{e^x}{x^3} + o(\frac{e^x}{x^3})$$

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Soit $x \in I$, on calcule $T(f)(x) = \int_0^x \dfrac{a}{1+t}\,\mathrm{d}t = a\ln(1+x)$. Donc

$$\boxed{F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\ln(1+x) \end{array} \right.}$$

$\boxed{Q\ 2}$ Soit $x \in I$, on calcule

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln^2(t+1)\right]_0^x = \boxed{\frac{1}{2}\ln^2(x+1)}$$

$\boxed{Q\ 3}$ Soit $x \in I$. On a

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{t}{(t+1)(t+2)^2}\,\mathrm{d}t$$

La décomposition de cette fraction rationnelle s'écrit

$$\frac{t}{(t+1)(t+2)^2} = \frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t+2} + \frac{2}{(t+2)^2}$$

et on trouve finalement

$$\boxed{T(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right| - \dfrac{2}{x+2} + 1 - \ln 2 \end{array} \right.}$$

Posons $h = 1/x$ et faisons un $DL(0,2)$ de

$$\begin{aligned} g(h) = T(f)(1/h) &= (1-\ln 2) + \ln(1+2h) - \ln(1+h) - 2h \times \frac{1}{1+2h} \\ &= (1-\ln 2) + \left[(2h) - \frac{(2h)^2}{2} + o(h^2)\right] - \left[h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right] - 2h\left[1 - 2h + o(h)\right] \\ &= (1-\ln 2) - h + \frac{5}{2}h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

Par conséquent, au voisinage de $+\infty$,

$$\boxed{T(f)(x) = (1-\ln 2) - \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Décomposons la fraction rationnelle. On trouve (multiplier par t, $t \to +\infty$, multiplier par $(t^2+1)^2$ et faire $t = i$) :

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} = \frac{1/4}{t+1} - \frac{1}{4}\frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2}\frac{t-1}{(t^2+1)^2}$$

Alors si $x \in I$, en intégrant les parties en t au numérateur,

$$T(f)(x) = \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{8}\ln(x^2+1) - \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(I_1 - I_2)$$

où $I_1 = \int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$ et $I_2 = \dfrac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$. En intégrant I_1 par parties, on trouve que

$$I_2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{x^2+1} + I_1\Big)$$

Finalement,

$$\boxed{T(f)(x) = \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{8}\ln(x^2+1) + \frac{x^2-x}{4(x^2+1)}}$$

$\boxed{Q\ 5}$ Écrivons

$$T(f_{n+1})(x) = \int_0^x \frac{t^n(t+1-1)}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t - T(f_n)(x)$$

On a donc

$$\boxed{T(f_{n+1})(x) + T(f_n)(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

et alors par substitutions, on trouve que

$$\boxed{T_n(f)(x) = (-1)^n\Big[\ln(x+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k}\Big]}$$

$\boxed{Q\ 6}$ D'après le théorème fondamental, si $f \in E$, l'application $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et donc est continue sur I. On a bien $T(f) \in E$. On vérifie facilement que T est linéaire. Montrons que $\mathrm{Ker}(T) = \{0_E\}$. Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$, on a $T(f) = 0$. Comme $T(f)$ est dérivable, on trouve que $T(f)' = 0$ et donc d'après le théorème fondamental que $\forall t \in I$, $\dfrac{f(t)}{t+1} = 0$, c'est à dire que $f = 0_E$. Montrons que $\boxed{\mathrm{Im}\,T = \{f \in \mathcal{C}^1(I) \mid f(0) = 0\}}$. $\subset$: d'après le théorème fondamental, si $f \in E$, $T(f) \in \mathcal{C}^1(I)$ et $T(f)(0) = 0$. $\supset$: soit $g \in \mathcal{C}^1(I)$ telle que $g(0) = 0$. Posons $f : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (1+t)g'(t) \end{array}\right.$. On a $f \in E$ et si $x \in I$, $\int_0^x \dfrac{f(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t = g(x) - g(0) = g(x)$. Par conséquent $T(f) = g$.

$\boxed{Q\ 7}$ D'après le théorème fondamental, puisque f est continue sur l'intervalle I, la fonction $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I$, $T(f)'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1} > 0$. Par conséquent, $T(f)$ est une fonction strictement croissante sur I.

$\boxed{Q\ 8}$ On a vu que $T(f)$ était de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que $\forall x \in I$, $T(f)'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+x}$. On calcule le développement limité de $T(f)'$ à l'ordre 2 en 0 :

$$T(f)'(x) = 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$$

Puisque $T(f)(0) = 0$, par primitivation de DL, on en déduit le $DL(0{,}3)$ de $T(f)$:

$$\boxed{T(f)(x) = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)}$$

Par conséquent, la courbe représentative de $T(f)$ admet en 0 une tangente d'équation $y = x$ et se trouve localement en dessous de sa tangente.

$\boxed{Q\ 9}$ Montrons que la fonction $T(f)$ est majorée par 1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Soit $x > 0$. puisque $\forall t \in [0, +\infty[$, $t + 1 \geq 1$, il vient que

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-t} \leq 1$$

Comme $T(f)$ est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie L en $+\infty$.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrons que $\boxed{T(f)(x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} -\infty}$. Soit $x \in]-1,0]$. Puisque $\forall t \in [x,0]$, $e^{-t} \geq e^{-x} \geq 1$, il vient que

$$T(f)(x) = -\int_x^0 \frac{e^{-t}}{t+1}\,\mathrm{d}t \leq -\int_x^0 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln(x+1) \xrightarrow[x\to -1^+]{} -\infty$$

Par le théorème des gendarmes, on a donc $T(f) \xrightarrow[x\to -1^+]{} -\infty$.

$\boxed{Q\ 11}$

$\boxed{Q\ 12}$

a. Puisque $f(t) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geq A$, $|f(t)| \leq 1$. Comme la fonction f est continue sur le *segment* $[0,A]$, elle est bornée sur ce segment : il existe $M_1 > 0$ tel que $\forall t \in [0,A]$, $|f(t)| \leq M_1$. Posons alors $M_2 = \max(1,M_1)$. On a bien $\forall t \in J$, $|f(t)| \leq M_2$.

b. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(t) \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geq A$, $|f(t)| \leq \varepsilon$. Posons $A' = e^A > 0$. Soit alors $x \geq A'$, puisque $A \leq \ln x \leq x$ $(x \geq 1)$, on a donc $\forall t \in [\ln x, x]$, $|f(t)| \leq \varepsilon$. Par passage à la borne sup., on en tire que $0 \leq \alpha(x) \leq \varepsilon$.

c. Soit $x \geq 1$. Utilisons Chasles :

$$\begin{aligned}
\left|T(f)(x)\right| &= \left|\int_0^{\ln x} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_{\ln x}^{x} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{\ln x} \frac{|f(t)|}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_{\ln x}^{x} \frac{|f(t)|}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&\leq M\int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \alpha(x)\int_{\ln x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}
\end{aligned}$$

d. En calculant les deux intégrales ci-dessus, on obtient la majoration

$$\left|T(f)(x)\right| \leq M\ln\left[1+\ln(x)\right] + \alpha(x)\left[\ln(1+x) - \ln(1+\ln x)\right]$$

Par conséquent,

$$\frac{\left|T(f)(x)\right|}{\ln x} \leq (M - \alpha(x))\frac{\ln(1+\ln x)}{\ln x} + \alpha(x)\frac{\ln(1+x)}{\ln x}$$

Mais $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u\to +\infty]{} 0$, par composée de limites, $\dfrac{\ln(1+\ln x)}{\ln x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$. Comme de plus $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 1$ et que $\alpha(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$, on obtient finalement que $\dfrac{\left|T(f)(x)\right|}{\ln x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ et donc que $T(f)(x) = o(\ln x)$.

$\boxed{Q\ 13}$ Définissons la fonction $g \in E$ par $\forall t \in I$, $g(t) = f(t) - \lambda$. Par linéarité de T, et en utilisant le calcul de la question 1, on trouve que $\forall x \geq 1$,

$$T(f)(x) = \lambda\ln(1+x) + T(g)(x)$$

Mais comme $\ln(1+x) = \ln(x) + \ln(1+1/x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \ln x$ et que d'après la question 12 $T(g)(x) = o(\ln x)$, on a $\boxed{T(f)(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \lambda\ln(x)}$.

$\boxed{Q\ 14}$ Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$, il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geq A$, $f(t) \geq 1$. Soit alors $x \geq A$, minorons $T(f)(x)$:

$$T(f)(x) = \int_0^A \frac{f(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int_A^x \frac{f(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^A \frac{f(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int_A^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \geq C + \ln(x+1) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$$

Avec $C' = \int_0^A \dfrac{f(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t - \ln(1+A)$. D'après le théorème des gendarmes, $T(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

$\boxed{Q\ 15}$

a. Soit $x \geq 0$, écrivons

$$\begin{aligned}
x^{n-2}e^{-x}F_n(x) &= x^{n-2}e^{-x}\Big[\int_0^{x/2} \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t + \int_{x/2}^{x} \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t\Big] \\
&\leq x^{n-1}e^{-x}\Big[\frac{x}{2}e^{x/2} + e^x \int_{x/2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^n}\Big] \\
&= x^{n-1}e^{-x/2} + \frac{x^{n-2}}{n-1}\Big(\frac{1}{(x/2+1)^{n-1}} - \frac{1}{(x+1)^{n-1}}\Big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, $F_n(x) = o(\dfrac{e^x}{x^{n-2}})$.

b. Intégrons $F_n(x)$ par parties. On trouve

$$F_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n} - 1 + nF_{n+1}(x)$$

$$x^{n-1}e^{-x}F_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(x+1)^n} - x^{n-1}e^{-x} + nx^{n-1}e^{-x}F_{n+1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Puisque d'après a) $F_{n+1}(x) = o(e^x/x^{n-1})$

c. Soit $x \geq 0$. Intégrons $T(f)(x)$ trois fois par parties. On trouve que

$$\begin{aligned}
T(f)(x) &= e^x\Big(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}\Big) - 4 + 6F_4(x) \\
&= e^x\Big(\frac{1}{x}\frac{1}{1+1/x} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{(1+1/x)^2} + \frac{2}{x^2}\frac{1}{(1+1/x)^3}\Big) + o(\frac{e^x}{x^3}) \\
&= e^x\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o(\frac{1}{x^3})\Big) + o(\frac{e^x}{x^3}) \\
&= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^3} + o(\frac{e^x}{x^3})
\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser $\boxed{a = 1, b = 0, c = 1}$.