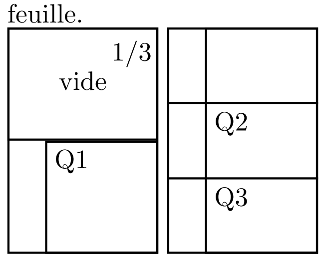
MPSI 2
DS 5

le 15 janvier 2003

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Premier problème

1.1 Partie 1

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux projecteurs p, q de E vérifiant $p \circ q = 0_{L(E)}$. On définit l'endomorphisme $r = p + q - q \circ p$.

$\boxed{Q\ 1}$ Soient deux endomorphismes $(u,v) \in L(E)^2$. Montrer que $u \circ v = 0_{L(E)} \iff \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.

$\boxed{Q\ 2}$ Montrer que r est un projecteur.

$\boxed{Q\ 3}$ Montrer que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

$\boxed{Q\ 4}$ Montrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

1.2 Partie 2

On considère dans cette partie l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On définit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, le vecteur $g = (1,1,1)$ et $G = \operatorname{Vect}(g)$.
On définit également $k = (1,2,1)$, $K = \operatorname{Vect}(k)$, $l_1 = (1,0,-1)$, $l_2 = (-2,1,1)$ et $L = \operatorname{Vect}(l_1,l_2)$.

$\boxed{Q\ 5}$ Déterminer une base du sous-espace F et un système d'équations du sous-espace L.

$\boxed{Q\ 6}$ Montrer que $E = F \oplus G$ et que $E = K \oplus L$.

On note p le projecteur sur G parallèlement à F et q le projecteur sur K parallèlement à L.

$\boxed{Q\ 7}$ Déterminer les expressions analytiques de p et q.

$\boxed{Q\ 8}$ Vérifier que $p \circ q = 0_{L(E)}$ et déterminer l'expression analytique du projecteur r.

$\boxed{Q\ 9}$ On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. À l'aide d'un dessin, donner sans justifications une relation entre s et p. Déterminer l'expression analytique de s.

On considère un réel $\lambda \notin \{-1,1\}$ et on définit l'endomorphisme $u = \lambda id - s$.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer que u est inversible et déterminer son inverse en fonction de p et de id.

$\boxed{Q\ 11}$ Soit un entier $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer l'expression de l'endomorphisme u^n en fonction de p et de id.

1.3 Partie 3

On considère dans cette partie l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{cases}$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires. On définit également $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}(\phi)$.

$\boxed{Q\ 12}$ Vérifier *rapidement* que $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

$\boxed{Q\ 13}$ Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ et pour une fonction $f \in E$, déterminer la fonction $q(f)$ où q est le projecteur sur $\mathcal{I}$ parallèlement à $\mathcal{P}$.

$\boxed{Q\ 14}$ Montrer que $E = F \oplus G$ et pour une fonction $f \in E$, déterminer la fonction $p(f)$ où p est le projecteur sur G parallèlement à F.

$\boxed{Q\ 15}$ Vérifier que $p \circ q = 0_{L(E)}$ et pour une fonction $f \in E$, déterminer la fonction $r(f)$.

$\boxed{Q\ 16}$ Pour un entier $n \geq 2$ et $f \in E$, déterminer la fonction $(p - q)^n(f)$.

1.4 Partie 4

On considère dans cette partie le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}$ et un nombre complexe $w \in \mathbb{C}$. On définit l'application

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} + wz \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 17}$ Vérifier que p est un endomorphisme.

$\boxed{Q\ 18}$ Montrer que p est un projecteur si et seulement si $w \in \{-j, -j^2\}$.

$\boxed{Q\ 19}$ Montrer que si $w \notin \{-j, -j^2\}$, alors p est inversible.

On suppose désormais que p est un projecteur.

$\boxed{Q\ 20}$ Déterminer $\operatorname{Ker} p$. On exprimera le résultat à l'aide de w.

$\boxed{Q\ 21}$ Déterminer $\operatorname{Im} p$.

On considère maintenant une forme linéaire ϕ sur E non-nulle et l'on définit l'application :

$$q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \phi(z).w \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 22}$ Trouver une condition nécessaire et suffisante sur ϕ pour que q soit un projecteur. Montrer qu'alors $p \circ q = 0_{L(E)}$.

$\boxed{Q\ 23}$ Si cette condition est vérifiée, montrer que $r = \mathrm{id}$.

$\boxed{Q\ 24}$ Dans le cas où $w = -j$, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des formes linéaires ϕ vérifiant la condition précédente. Quelle structure cet ensemble possède-t-il ?

2 Exercice

On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathcal{S}(\mathbb{C})$ des suites complexes. On définit trois suites x, y, z de E par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 1,\ y_n = i^n,\ z_n = \sin\left(\frac{n\pi}{s}\right)$$

où $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$.
On dit qu'une suite $u = (u_n) \in E$ est périodique si et seulement s'il existe un entier $p > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$. Un tel entier p est appelé une *période* de la suite u. On note $T(u)$ l'ensemble des périodes de la suite u.
On désignera par $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites périodiques.

$\boxed{Q\ 25}$ Soit une suite $u \in \mathcal{P}$. Montrer que $T(u)$ possède un plus petit élément $p_0 > 0$, puis que $T(u) = \{kp_0\ ;\ k \in \mathbb{N}^\star\}$.

$\boxed{Q\ 26}$ Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Pour deux entiers $n \geq 0$, $p > 0$ et une suite $u \in E$, on note

$$A_{n,p}(u) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k}$$

$\boxed{Q\ 27}$ Montrer que pour une suite périodique $u \in \mathcal{P}$, tous les nombres $A_{n,p}(u)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in T(u)$ sont égaux. On notera $L(u)$ leur valeur commune.

$\boxed{Q\ 28}$ Calculer $L(x)$, $L(y)$ et $L(z)$ pour les trois suites définies dans l'introduction.

$\boxed{Q\ 29}$ Montrer que l'application

$$L : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ u & \longmapsto & L(u) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{P}$.

$\boxed{Q\ 30}$ Déterminer un supplémentaire de $\operatorname{Ker} L$ dans l'espace $\mathcal{P}$.

$\boxed{Q\ 31}$ On note $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des suites de E 2-périodiques. Vérifier que $\mathcal{P}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ et déterminer une base de $\mathcal{P}_2$.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Exercice fait en cours.

$\boxed{Q\ 2}$ Calculons r^2 (attention, p et q ne commutent pas forcément) :

$$r^2 = p^2+p\circ q-p\circ q\circ p+q\circ p+q^2-q^2\circ p-q\circ p^2-q\circ p\circ q+q\circ p\circ q\circ p = p+q\circ p+q-q\circ p-q\circ p = p+q-q\circ p$$

On a utilisé dans ce calcul les relations $p^2 = p$, $q^2 = q$ (p et q sont des projecteurs), et $p\circ q = 0$. Puisque $r^2 = r$, r est un projecteur.

$\boxed{Q\ 3}$ Montrons que $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. Soit $x \in \operatorname{Ker} r$. On a $p(x) + q(x) - q\circ p(x) = 0_E$. En appliquant p, on trouve que $p^2(x) + p\circ q(x) - p\circ q\circ p(x) = 0_E$ d'où $p(x) = 0_E$ ($p^2 = p$ et $p\circ q = 0_{L(E)}$). Par conséquent, $x \in \operatorname{Ker} p$. On montre de la même façon que $x \in \operatorname{Ker} q$. L'autre inclusion est claire.

$\boxed{Q\ 4}$

- Montrons que la somme est directe, c'est à dire que $\operatorname{Im} p\cap \operatorname{Im} q = \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Im} p\cap\operatorname{Im} q$. Comme p et q sont des projecteurs, d'après la caractérisation de l'image d'un projecteur, $p(x) = x = q(x)$. On a donc $p\big(q(x)\big) = p(x) = x$ et comme $p\circ q = 0_{L(E)}$, il vient que $x = 0_E$.
- $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$: soit $x \in \operatorname{Im} r$. Puisque r est un projecteur, $r(x) = x$. Alors

$$x = p(x) + q(x) - q\circ p(x) = p(x) + q(x - p(x))$$

  Comme $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et que $q(x - p(x)) \in \operatorname{Im} q$, on a bien $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
- $\operatorname{Im} p+\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$: soit $x \in \operatorname{Im} p+\operatorname{Im} q$. Il existe $(x_1,x_2) \in \operatorname{Im} p\times\operatorname{Im} q$ tels que $x = x_1+x_2$. Alors

$$r(x) = p(x_1) = p(x_2)+q(x_1)+q(x_2)-q\circ p(x_1)-q\circ p(x_2) = x_1+x_2+p(x_2)+q(x_1)-q\circ p(x_1)-q\circ p(x_2)$$

  Mais puisque $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$, on a $p(x_2) = 0_E$ et comme $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et que p est un projecteur, $p(x_1) = x_1$. On a donc $r(x) = x$ et donc $x \in \operatorname{Im} r$.

$\boxed{Q\ 5}$ Par exemple $f = (f_1,f_2)$ est une base de F avec $f_1 = (0,1,1)$ et $f_2 = (1,1,0)$. On trouve que $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

$\boxed{Q\ 6}$ Considérons la forme linéaire non-nulle

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x - y + z \end{array} \right.$$

On a $F = \operatorname{Ker}\phi$ et donc F est un hyperplan. Puisque $g \notin F$, on sait d'après le cours que la droite vectorielle $G = \operatorname{Vect}(g)$ et l'hyperplan F sont supplémentaires. De la même façon, l'hyperplan K et la droite vectorielle L sont supplémentaires.

$\boxed{Q\ 7}$ Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Décomposons X sur $F \oplus G$: $\exists!(X_F,\lambda) \in F\times\mathbb{R}$ tels que $X = X_F + \lambda.g$. Comme $X_F = X - \lambda.g = (x-\lambda,y-\lambda,z-\lambda) \in F$, on doit avoir $(x-\lambda)-(y-\lambda)+(z-\lambda) = 0$ ce qui donne $\lambda = x - y + z$ et ensuite $X_F = (y - z, - x + 2y - z, - x + y)$. Alors $p(X) = \lambda.g$ et donc

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z,x-y+z,x-y+z) \end{array} \right.$$

De même, on trouve que

$$q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (\dfrac{x+y+z}{4},\dfrac{x+y+z}{2},\dfrac{x+y+z}{4}) \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 8}$ Comme $k \in F$, on a $\operatorname{Im} g = K \subset F = \operatorname{Ker} p$. D'après la question 1, on a bien $p \circ q = 0_{L(E)}$. Après calculs, on trouve que

$$r : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (\dfrac{x+z}{2}, y, \dfrac{x+z}{2}) \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 9}$ On a $s = \mathrm{id} - 2p$ (faire un dessin) et

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+2y-2z, -2x+3y-2z, -2x+2y-z) \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 10}$ Comme $s^2 = \mathrm{id}$ (symétrie vectorielle) et que $u = \lambda\,\mathrm{id} - s$, on a $u^2 - 2\lambda u + (\lambda^2 - 1)\,\mathrm{id} = 0_{L(E)}$. Par conséquent, puisque $\lambda^2 \neq 1$, on peut écrire

$$u \circ \Big[\frac{1}{\lambda^2 - 1}(u - 2\lambda\,\mathrm{id})\Big] = \Big[\frac{1}{\lambda^2 - 1}(u - 2\lambda\,\mathrm{id})\Big] \circ u = \mathrm{id}$$

ce qui montre que $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ et que

$$\boxed{u^{-1} = \Big[\frac{1}{1 - \lambda^2}(u - 2\lambda\,\mathrm{id})\Big]}$$

comme $u = 2p + (\lambda - 1)\,\mathrm{id}$, en remplaçant, on trouve finalement que

$$\boxed{u^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\big(2p - (\lambda + 1)\,\mathrm{id}\big)}$$

$\boxed{Q\ 11}$ Puisque $u = 2p + (\lambda - 1)\,\mathrm{id}$ et que p et id commutent, à l'aide de la formule du binôme, on trouve :

$$\begin{aligned} u^n &= \big[2p + (\lambda - 1)\,\mathrm{id}\big]^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (\lambda - 1)^{n-k} p^k \\ &= (\lambda - 1)^n\,\mathrm{id} + \Big[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k (\lambda - 1)^{n-k}\Big] p \quad (p^k = p \text{ si } k \geq 1) \\ &= \boxed{(\lambda - 1)^n\,\mathrm{id} + \big[(\lambda + 1)^n - (\lambda - 1)^n\big].p} \end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 12}$ Exercice traité en cours.

$\boxed{Q\ 13}$ Traité en cours.

$$q(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 14}$ Remarquons que $F = \operatorname{Ker} \psi$ est un hyperplan, noyau de la forme linéaire non-nulle

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array} \right.$$

et que G est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\phi \notin F$. D'après le cours, on sait que F et G sont supplémentaires. Soit alors $f \in E$, $\exists!(f_F, \lambda) \in F \times \mathbb{R}$ tels que $f = f_F + \lambda.\phi$. Puisque

$f_F = f - \lambda.\phi \in F$, on doit avoir $f_F(0)$, c'est à dire $\lambda = f(0)$ d'où l'on tire $f_F = f - f(0).\phi$. On a alors

$$p(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(0) \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 15}$ On a $\mathcal{I} \subset F$. En effet, une fonction f impaire vérifie $f(0) = 0$. Par conséquent, $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ et d'après la question 1, on a bien $p \circ q = 0_{L(E)}$. Après calculs, on trouve que $q \circ p = 0_{L(E)}$ et

$$q(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(0) + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 16}$ Puisque $p \circ q = q \circ p = 0_{L(E)}$, on peut appliquer la formule du binôme :

$$(p-q)^n = p^n + (-1)^n q^n + \sum_{k=1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} p^k q^{n-k} = p^n + (-1)^n q^n$$

puisque lorsque $1 \leq k \leq n-1$, $p^k \circ q^{n-k} = 0$. D'autre part, puisque $n \geq 1$, $p^n = p$ et $q^n = q$ (ce sont des projecteurs vérifiant $p^2 = p$ et $q^2 = q$). En conclusion, $\boxed{(p-q)^n = p + (-1)^n q}$. On calcule alors

$$(p-q)^n(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(0) + (-1)^n \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 17}$ Facile. On utilise que le conjugué d'un scalaire (ici un réel) est lui-même.

$\boxed{Q\ 18}$ Supposons que p soit un projecteur. On a alors $p^2 = p$ et donc pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$: $p^2(z) = p(z)$ ce qui donne

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (\overline{w} + w - 1)\overline{z} + (\overline{w}^2 - \overline{w} + 1)z = 0$$

En particulier pour $z = 1$ et pour $z = i$, on trouve que

$$\left\{ \begin{array}{ll} (L_1) : (\overline{w} + w - 1) + (w^2 - w + 1) & = 0 \\ (L_2) : -(\overline{w} + \overline{w} - 1)i + (w^2 - w + 1)i & = 0 \end{array} \right.$$

En formant $i(L_1) + L_2$, on obtient que $w^2 - w + 1 = 0$ puis que $w + \overline{w} = 1$. Comme $1 + j + j^2 = 0$, on trouve les deux racines évidentes de l'équation du second degré $w^2 - w + 1 = 0$: $w = -j$ ou alors $w = -j^2$. Par conséquent, $\boxed{w \in \{-j, -j^2\}}$. Réciproquement, lorsque $w = -j$ ou $w = -j^2$, on a $w + \overline{w} = 2\operatorname{Re} w = 1$ et donc p est un projecteur.

$\boxed{Q\ 19}$ En reprenant le calcul précédent, on trouve que

$$p^2 - 2\operatorname{Re}(w)p - (w^2 - w + 1)\operatorname{id} = 0_{L(E)}$$

Lorsque $w \notin \{-j, -j^2\}$, $w^2 - w + 1 \neq 0$ et donc

$$p \circ \left[\frac{1}{w^2 - w + 1} \big(p - 2\operatorname{Re}(w)\operatorname{id}\big) \right] = \left[\frac{1}{w^2 - w + 1} \big(p - 2\operatorname{Re}(w)\operatorname{id}\big) \right] = \operatorname{id}$$

ce qui montre que p est inversible et que

$$p^{-1} = \frac{1}{w^2 - w + 1} \big(p - 2\operatorname{Re}(w)\operatorname{id}\big)$$

$\boxed{Q\ 20}$ Supposons que $w = -j$. Soit $z \in \operatorname{Ker} p$. On a $\overline{z} = jz$. Si $z \neq 0$, mettons-le sous forme polaire : $z = \rho e^{i\theta}$. On a alors puisque $\rho \neq 0$, $e^{-i\theta} = e^{\frac{2i\pi}{3} + i\theta}$ ce qui donne $\theta = k\pi - \frac{\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$, c'est à dire $z \in \text{Vect}(j) = \text{Vect}(w)$ (faire un dessin). Comme réciproquement, $p(j) = j^2 - j^2 = 0$, on a bien $\text{Ker}\, p = \text{Vect}(j)$. Si $w = -j^2$, montrons que $\text{Ker}\, p = \text{Vect}(j^2) = \text{Vect}(w)$ par une autre méthode. Soit $z \in \text{Ker}\, p$. Posons $u = jz$ et calculons

$$u - \overline{u} = jz - \overline{j}\overline{z} = j^2(j^2 z - \overline{z}) = 0$$

ce qui montre que $u \in \mathbb{R}$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \dfrac{\lambda}{j} = \lambda j^2$. On a montré que $\text{Ker}\, p \subset \text{Vect}(j^2)$ et la réciproque est facile.

$\boxed{Q\ 21}$ Supposons que $w = -j$ et montrons que $\text{Im}\, p = \text{Vect}(ij^2) = \text{Vect}(e^{i\frac{5\pi}{6}})$. Soit $\zeta \in \text{Im}\, p$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta = p(z) = \overline{z} - jz$. Mettons z sous forme polaire : $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\zeta &= \rho\Big[e^{-i\theta} - e^{i(\theta + \frac{2\pi}{3})}\Big] \\
&= \rho e^{i\frac{\pi}{3}}\Big[e^{-i(\theta+\frac{\pi}{3})} - e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}\Big] \\
&= 2\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{3})\big[ie^{i\frac{\pi}{3}}\big] \\
&= \underbrace{-2\rho\sin(\theta + \frac{\pi}{3})}_{\in\mathbb{R}}\, ij^2 \\
&\in \text{Vect}(ij^2) = \text{Vect}(e^{i\frac{5\pi}{6}})
\end{aligned}$$

On vérifie réciproquement que si $\zeta \in \text{Vect}(ij^2)$, alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta = p(z)$ (reprendre le calcul précédent pour déterminer un antécédant z particulier).
Lorsque $w = -j^2$, montrons par une autre méthode que $\text{Im}\, p \subset \text{Vect}(ij)$: Soit $\zeta \in \text{Im}\, p$. Il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta = \overline{z} - j^2 z$. Posons $u = j^2\zeta$ et calculons

$$u + \overline{u} = j^2(\overline{z} - j^2 z) + j(z - j\overline{z}) = 0$$

u est donc un nombre imaginaire pur : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = i\lambda$ et alors $\zeta = \lambda\dfrac{i}{j^2} = \lambda ij \in \text{Vect}(ij)$.

$\boxed{Q\ 22}$ On vérifie facilement que q est linéaire. Supposons que q est un projecteur. Comme $\phi \neq 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\phi(z) \neq 0_{\mathbb{R}}$. Calculons

$$q^2(z) = q(\phi(z).w) = \phi\big(\phi(z).w\big).w = \big[\phi(z) \times \phi(w)\big].w$$

Comme $q^2 = q$, et que $w \neq 0$, on doit donc avoir $\phi(w) = 1$. On vérifie réciproquement que si $\phi(w) = 1$, $q^2 = q$ et donc que q est un projecteur.
Il est clair que $\text{Im}(q) = \text{Vect}(w) = \text{Ker}(p)$. D'après la question 1, on a donc $p \circ q = 0$.

$\boxed{Q\ 23}$ On sait d'après la première partie que r est un projecteur et que $\text{Im}\, r = \text{Im}\, p \oplus \text{Im}\, q$. Comme $\text{Im}\, p$ et $\text{Im}\, q$ sont deux droites vectorielles distinctes, $\text{Im}\, r = \mathbb{C}$ et donc $\text{Im}\, r = \mathbb{C}$. Mais comme l'image d'un projecteur est l'ensemble des vecteurs invariants, $\forall z \in \mathbb{C}$, $r(z) = z$ et donc $r = \text{id}$.

$\boxed{Q\ 24}$ Considérons une forme linéaire ϕ vérifiant la propriété. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a $\phi(z) = x\phi(1) + y\phi(i)$. En posant $a = \phi(1) \in \mathbb{R}$ et $b = \phi(i) \in \mathbb{R}$,

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & a\,\text{Re}(z) + b\,\text{Im}\, z \end{array} \right.$$

Comme $\phi(-j) = 1$, on doit avoir $a - \sqrt{3}b = 2$, et donc $\phi(z) = 2\,\text{Re}(z) + b\big(\sqrt{3}\,\text{Re}(z) + \text{Im}(z)\big)$.
En définissant les deux formes linéaires :

$$\phi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & 2\,\text{Re}(z) \end{array} \right. \text{ et } \phi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \sqrt{3}\,\text{Re}(z) + \text{Im}(z) \end{array} \right.$$

on a montré que

$$\mathcal{S} \subset \{\phi_1 + b\phi_2 \ ; \ b \in \mathbb{R}\}$$

L'inclusion réciproque se vérifie facilement. Par conséquent, $\mathcal{S}$ est une *droite affine* de l'espace dual $\mathbb{C}^\star$ passant par ϕ_1 parallèle à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(\phi_2)$.

$\boxed{Q\ 25}$

- $T(u) \subset \mathbb{N}$ et $T(u) \neq \emptyset$ puisque u est périodique. Donc d'après une propriété de $\mathbb{N}$, $T(u)$ possède un plus petit élément p_0.
- Montrons que $\{kp_0 \ ; \ k \in \mathbb{N}^\star\}$. Se montre par récurrence sur k.
- Montrons que $T(u) \subset \{kp_0 \ ; \ k \in \mathbb{N}^\star\}$. Soit $p \in T(u)$ une période de la suite u. Effectuons la division euclidienne de l'entier p par l'entier p_0 : $\exists!(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p = qp_0 + r$ avec $0 \leq r < p_0$. Montrons par l'absurde que $r = 0$. Si $r \neq 0$, montrons que $r \in T(u)$. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = u_{n+p} = u_{(n+r)+qp_0} = u_{n+r}$$
car $qp_0 \in T(u)$ d'après l'inclusion $\supset$. On aurait donc $r \in T(u)$ avec $r < p_0$: une absurdité puisque p_0 est le plus petit élément de $T(u)$.

$\boxed{Q\ 26}$ La suite nulle est 1-périodique, donc $0_E \in \mathcal{P}$. Soient $(u,v) \in \mathcal{P}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Notons p_0 la plus petite période de u et q_0 la plus petite période de v. Posons $k = \mathrm{ppcm}(p_0,q_0)$. Puisque $k \in T(u)$ et $k \in T(v)$, k est une période commune à u et à v. On montre alors facilement que la suite $\lambda u + \mu v$ est k périodique et donc que $\lambda u + \mu v \in \mathcal{P}$.

$\boxed{Q\ 27}$ Notons $p_0 = \min T(u)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons la division euclidienne de n par p : $\exists!(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = qp + r$ et $0 \leq r < p$. Alors

$$\begin{aligned}
A_{n,p}(u) &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_{r+k+qp} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_{r+k} \\
&= \frac{1}{p} \Big[\sum_{i=r}^{p-1} u_i + \sum_{i=p}^{p+r-1} u_i \Big] \\
&= \frac{1}{p} \Big[\sum_{i=r}^{p-1} u_i + \sum_{j=0}^{r-1} u_{j+p} \Big] \quad (j = i - p) \\
&= \frac{1}{p} \Big[\sum_{i=r}^{p-1} u_i + \sum_{j=0}^{r-1} u_j \Big] \quad (p \in T(u)) \\
&= A_{0,p}(u)
\end{aligned}$$

Comme $p \in T(u)$, on a vu qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $p = lp_0$. Écrivons alors

$$\begin{aligned}
A_{0,p}(u) &= \frac{1}{lp_0} \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{k=ip_0}^{(i+1)p_0-1} u_k \\
&= \frac{1}{lp_0} \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{p_0-1} u_{j+ip_0} \quad (j = k - ip_0) \\
&= \frac{1}{lp_0} \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{p_0-1} u_j \quad (ip_0 \in T(u)) \\
&= \frac{1}{p_0} \sum_{k=0}^{p_0-1} u_k \\
&= A_{0,p_0}(u)
\end{aligned}$$

Tous les $A_{n,p}(u)$ valent donc $A(0,p_0)(u)$ et sont donc indépendants de n et de $p \in T(u)$.

$\boxed{Q\ 28}$ On trouve que $L(x) = 1$. La plus petite période de y est 4, et $L(y) = \dfrac{1}{4}(1+i-1-i) = 0$. La plus petite période de z est s, et $L(z) = \dfrac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\sin(k\pi/s)$. Pour calculer cette somme, introduisons la somme des exponentielles complexes associée :

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=0}^{s-1} e^{i\frac{k\pi}{s}} \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} \left(e^{i\frac{\pi}{s}}\right)^k \quad (\text{ somme géométrique de raison } e^{i\frac{\pi}{s}} \neq 1 \\ &= \frac{e^{i\pi}-1}{e^{i\frac{\pi}{s}}-1} \\ &= \frac{ie^{-i\frac{\pi}{2s}}}{\sin(\frac{\pi}{2s})} \end{aligned}$$

D'où l'on tire $L(z) = \dfrac{1}{s}\operatorname{Im}(U) = \boxed{\dfrac{1}{s}}$.

$\boxed{Q\ 29}$ Soient $(u,v) \in \mathcal{P}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Notons $w = \lambda u + \mu v$. Notons $p_0 = \min T(u)$ et $q_0 = \min T(v)$. On a vu que $l = \operatorname{ppcm}(p_0,q_0) \in T(w)$. Alors puisque les $A_w(n,p)$ sont indépendants de n et $p \in T(w)$ et que $l \in T(u)$, $l \in T(v)$:

$$L(u) = A_{0,l}(w) = \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda A_{0,l}(u) + \mu A_{0,l}(v) = \lambda L(u) + \mu L(v)$$

$\boxed{Q\ 30}$ Comme L est une forme linéaire non-nulle, $H = \operatorname{Ker} L$ est un hyperplan de $\mathcal{S}$. On a vu que $x \in \mathcal{S}$ avec $L(x) = 1$. D'après un théorème du cours, la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(x)$ est un supplémentaire de H dans $\mathcal{S}$.

$\boxed{Q\ 31}$ On montre facilement que $\mathcal{P}_2$ est un sev de $\mathcal{P}$. Considérons les deux suites $(u,v) \in E^2$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases},\ v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

On vérifie facilement que u et v sont 2-périodiques. Montrons que le système (u,v) est libre dans $\mathcal{P}_2$: soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $w = \lambda u + \mu v = 0$. Le premier terme w_0 de la suite w vaut λ et donc $\lambda = 0$. Le deuxième terme vaut $w_1 = \mu$ et donc $\mu = 0$.
Montrons que le système (u,v) est générateur de $\mathcal{P}_2$. Soit une suite $w \in \mathcal{P}_2$. Puisque w est 2-périodique, si $n \in \mathbb{N}$ est pair, $w_n = w_0$ et si n est impair, $w_n = w_1$. On vérifie alors que $w = w_0.u + w_1.v$.
Le système (u,v) est donc une base de $\mathcal{P}_2$.