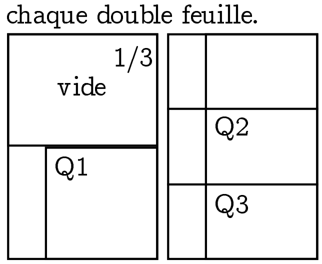
MPSI 2
DS 04

le 11 décembre 2002

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Étude d'une fonction

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\boxed{Q\ 1}$ Déterminer le domaine de définition de f et la continuité de f.

$\boxed{Q\ 2}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f(\frac{\pi}{2} - x)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I suffit-il de faire l'étude de f?

$\boxed{Q\ 3}$ Etudier la dérivabilité de f sur I et calculer f'.

$\boxed{Q\ 4}$ Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi,\pi]$.

$\boxed{Q\ 5}$

a) Montrer que $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} + \arccos\sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{2}} - \frac{\pi}{2}$$

b) Simplifier en utilisant la trigonométrie $f(x)$ sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2 Trigonométrie

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et les trois fonctions A_n, B_n, C_n définies sur l'intervalle $]0,2\pi[$ par $\forall x \in]0,2\pi[$:

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$

$$B_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_n(x)$$

$\boxed{Q\ 6}$ Calculer $A_n(x)$ pour $x \in]0,2\pi[$.

$\boxed{Q\ 7}$ Calculer $B_n(x)$ pour $x \in]0,2\pi[$. Déterminer les zéros de la fonction B_n dans l'intervalle $]0,2\pi[$. On donnera le nombre de ces zéros.

$\boxed{Q\ 8}$ Calculer pour $x \in]0,2\pi[$, $C_n(x)$ et montrer que $\forall x \in]0,2\pi[$, $C_n(x) \geq 0$. Déterminer les zéros de la fonction C_n dans l'intervalle $]0,2\pi[$ et préciser leur nombre.

3 Une équation fonctionnelle

On se propose de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f^2(x)} \tag{1}$$

$\boxed{Q\ 9}$ Quelle fonction usuelle vérifie-t-elle cette propriété ?

On considère désormais une fonction f quelconque vérifiant ces hypothèses.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 1$.

$\boxed{Q\ 11}$ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$.

$\boxed{Q\ 12}$

a) Justifier que la fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$. On note argth : $]-1,1[\mapsto \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

b) Justifier que argth est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer sa dérivée.

$\boxed{Q\ 13}$ On pose $g = \operatorname{argth} \circ f$. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = 2g(x)$$

$\boxed{Q\ 14}$ Déterminer f.

4 L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

On note A la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \text{ avec } x = a + b\sqrt{2}\}$$

$\boxed{Q\ 15}$ Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif

$\boxed{Q\ 16}$ Soit un élément $x \in A$. Montrer l'unicité d'un couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $x = a + b\sqrt{2}$.

On définit donc (grâce à l'unicité du couple (a,b)) pour $x \in A$, $\phi(x) = a - b\sqrt{2}$ et $N(x) = a^2 - 2b^2$.

$\boxed{Q\ 17}$

a. Montrer que ϕ est un isomorphisme de l'anneau $(A, +, \times)$ vers lui-même.
b. Pour $x \in A$, exprimer $N(x)$ à l'aide de x et de $\phi(x)$.
c. Montrer que $\forall (x,y) \in A^2$, $N(xy) = N(x)N(y)$.

$\boxed{Q\ 18}$ On note B l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau A.

a. De quelle structure peut-on munir l'ensemble B ?
b. Soit $x \in A$. Montrer que $x \in B \iff N(x) \in \{-1,1\}$.

$\boxed{Q\ 19}$

a. Montrer que $(1+\sqrt{2}) \in B$ et déterminer son inverse.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(1+\sqrt{2})^n \in B$ et $-(1+\sqrt{2})^n \in B$.

$\boxed{Q\ 20}$ Soient deux entiers strictement positifs $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$. On suppose que $(a+b\sqrt{2}) \in B$.

a. Montrer que $b \leq a < 2b$

b. Montrer que $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \in B$. On pose alors $a_1+b_1\sqrt{2} = \dfrac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ avec $(a_1,b_1) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $0 < a_1 \leq a$ et que $0 \leq b_1 < b$.

c. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2$, si $a+b\sqrt{2} \in B$, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $(a+b\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^k$. On fera une récurrence sur b.

$\boxed{Q\ 21}$ En déduire les éléments de B.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ $D_f = \mathbb{R}$. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1+\sin x}{2} \geq 0 \quad \big(\sin x \geq -1\big)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{1+\sin x}{2} \right| \leq \frac{1+\left|\sin x\right|}{2} \leq 1$$

Et comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et que arccos est continue sur $[-1,1]$, par composée :

$$x \mapsto \arccos\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De même, l'autre fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et donc f aussi.

$\boxed{Q\ 2}$ Utilisons la propriété:

$$\forall \theta \in [-1,1], \quad \arccos\theta + \arcsin\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{2}-x) &= \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Il suffit donc de faire l'étude sur $[-\infty,\frac{\pi}{4}]$ et de compléter le tracé de C_f par une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$.

Comme de plus, f est 2π périodique, il suffit de faire l'étude sur un intervalle d'amplitude 2π et de compléter la courbe par une infinité de translations de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

En conclusion, il suffit de faire l'étude sur

$$I = \left[\frac{-3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$$

$\boxed{Q\ 3}$ La fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$ est dérivable sur $D_1 = \left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$ à valeurs dans $]0,1[$. Comme arccos est dérivable sur $]-1,1[$, la composée est dérivable sur D_1.

De même, $x \mapsto \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ est dérivable sur $D_2 = \left[-\frac{3\pi}{4},0\right[\cup \left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ à valeurs dans $]0,1[$ et comme arcsin est dérivable sur $]0,1[$, la composée est dérivable sur D_2.

En conclusion, f est dérivable sur

$$D = I_1 \cup I_2 \cup I_3$$

où $I_1 = \left]-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[$, $I_2 = \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ et $I_3 = \left]0,\frac{\pi}{4}\right[$.

Calculons pour $x \in D$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1+\sin x}{2}}} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}} \times \frac{\cos x}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1+\cos x}{2}}} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} \times \frac{-\sin x}{2} \\
&= \frac{-\cos x}{2\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}} + \frac{\sin x}{2\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}} \\
&= -\frac{\cos x}{2\,|\cos x\,|} + \frac{\sin x}{2\,|\sin x\,|} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\\ -1 & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\\ 0 & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\end{cases}
\end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Comme f est constante sur les intervalles $[0,\frac{\pi}{4}]$ et $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}]$, et que

$$f(0) = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \arccos 0 - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

on trace sans problème le graphe de f sur $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et on le complète par symétrie et périodicité.

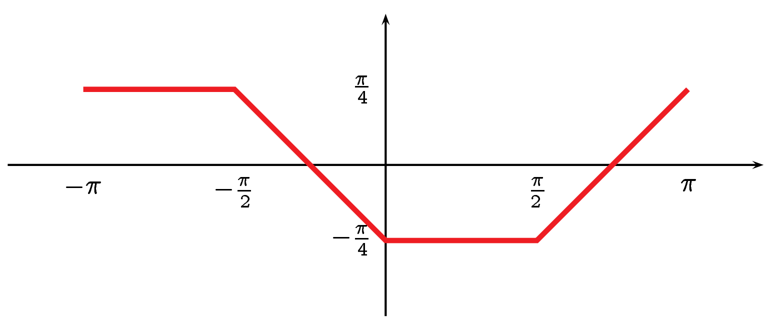


FIG. 1 – *Graphe de f sur $[-\pi,\pi]$*

$\boxed{Q\ 5}$ a) En utilisant la formule

$$\forall \theta \in [-1,1], \quad \arcsin\theta + \arccos\theta = \frac{\pi}{2}$$

et que $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$,

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

on obtient le résultat.

b) Utilisons la formule de trigonométrie :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \frac{\cos x + 1}{2} = \cos^2\frac{x}{2}$$

On obtient :

$$f(x) = \arccos\left|\cos(\frac{x}{2})\right| + \arccos\left|\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\right| - \frac{\pi}{2}$$

et comme $\frac{x}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $(\frac{\pi}{2} - x)/2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$f(x) = \frac{x}{2} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

$\boxed{Q\ 6}$ C'est un calcul fait en cours. On trouve

$$\boxed{A_n(x) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\cos(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}}$$

$\boxed{Q\ 7}$ Écrivons $B_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx} + \sum_{k=0}^n e^{-ikx} - 1$, c'est à dire $B_n(x) = 2A_n(x) - 1$. On trouve alors que

$$B_n(x) = \frac{2\sin(\frac{n+1}{2}x)\cos(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} - 1 = \boxed{\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]}{\sin(\frac{x}{2})}}$$

en utilisant la formule $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$. On en déduit que $B_n(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $(n+1/2)x = k\pi$, c'est à dire $x = \boxed{\dfrac{k\pi}{n+1/2}}$. Comme on cherche les zéros de B_n dans l'intervalle $]0,2\pi[$, on doit avoir $0 < \dfrac{k\pi}{(n+1/2)} < 2\pi$, c'est à dire $0 < k < 2n+1$ ou encore $k \in [\![1,2n]\!]$. La fonction B_n s'annule donc exactement $2n$ fois dans l'intervalle $]0,2\pi[$.

$\boxed{Q\ 8}$ En reprenant l'expression de $B_n(x)$,

$$C_n(x) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{k=0}^n \sin\left[(k+1/2)x\right]$$

Introduisons $W_n = \sum_{k=0}^n e^{i(k+1/2)x}$. On calcule cette somme géométrique ($e^{ix} \neq 1$ puisque $x \in]0,2\pi[$) :

$$W_n = e^{i\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikx} = e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{\sin\left[\frac{n+1}{2}x\right]}{\sin\left[\frac{x}{2}\right]}$$

On en tire en prenant la partie imaginaire :

$$\boxed{C_n(x) = \frac{\sin^2\left[\frac{n+1}{2}x\right]}{\sin^2\left[\frac{x}{2}\right]}}$$

On a donc $\forall x \in]0,2\pi[$, $C_n(x) \geq 0$ et la fonction C_n s'annule en tous les points $x = \dfrac{2k\pi}{n+1}$, avec $k \in [\![1,n]\!]$: elle possède n zéros.

$\boxed{Q\ 9}$ La fonction th.

$\boxed{Q\ 10}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Par l'inégalité $|\ ab\ | \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, on obtient :

$$|\ f(x)\ | \leq \frac{1^2 + f^2(x)}{1 + f^2(x)} = 1$$

$\boxed{Q\ 11}$ S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$$

Ce résultat se montre par récurrence:

$$\mathcal{P}(n) : f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$$

– $\mathcal{P}(0)$ est vérifié par hypothèse ;

– $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ D'après la relation (1):

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = \frac{2f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1+f^2\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}$$

d'où l'on tire

$$\left(f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)-1\right)^2 = 1$$

et donc $f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = 1$.

Alors, puisque la suite $\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$ converge vers 0, et que f est continue en 0, il vient que $f(0) = 1$ (image continue d'une suite), ce qui est faux.

En utilisant la même méthode, on montre que $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) \neq -1$ et par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| < 1$$

$\boxed{Q\ 12}$ a) La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2 x} > 0$$

elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J = \text{th}(\mathbb{R})$. Comme

$$\lim_{x \to \pm\infty} \text{th}\, x = \pm 1$$

on en déduit que $J =]-1,1[$.

b) Comme th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) \neq 0$$

d'après le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque, argth est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$\boxed{Q\ 13}$ Puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| < 1$, $\text{argth}(f(x))$ est bien défini $\forall x \in \mathbb{R}$ et comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$, que argth aussi, la composée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \text{th}(g(x))$$

Alors, d'après (1),

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}\,(g(x)) = \frac{2\,\text{th}(g(x))}{1+\text{th}^2(g(x))} = \text{th}\,(2g(x))$$

Et comme th est injective,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = 2g(x) \tag{2}$$

$\boxed{Q\ 14}$ En dérivant (2), on trouve que: $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(2x) = g'(x)$. Soit alors $x_0 \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g'\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = g'(x_0)$$

Or puisque $\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$ converge vers 0 et que g' est continue en 0, on en déduit que $g'(x_0) = g'(0)$. Par conséquent, g' est constante, et donc g est affine :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = ax + b$$

Mais puisque $g(0) = 0$, il faut que $b = 0$ et donc on a montré qu'il existait $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \text{th}(g(x)) = \text{th}(ax)$$

On vérifie réciproquement que toute fonction f de cette forme convient.

$\boxed{Q\ 15}$ On vérifie que A est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{R},+,\times)$.

$\boxed{Q\ 16}$ Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ et $(a',b')\in\mathbb{Z}^2$ tels que $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$. Si l'on avait $b\neq b'$, on aurait $\sqrt{2}=\dfrac{a'-a}{b-b'}\in\mathbb{Q}$ ce qui est impossible. Par conséquent, $b=b'$ et ensuite $a=a'$.

$\boxed{Q\ 17}$

a. Soient $(x,x')\in A^2$, $\exists!(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $x=a+b\sqrt{2}$, et $\exists!(a',b')\in\mathbb{Z}^2$ tels que $x'=a'+b'\sqrt{2}$. On calcule alors
   (a) $x+x'=(a+a')+(b+b')\sqrt{2}$ donc $\phi(x+x')=(a+a')-(b+b')\sqrt{2}=(a-b\sqrt{2})+(a'-b'\sqrt{2})=\phi(x)+\phi(x')$.
   (b) $x\times x'=(aa'+2bb')+(ab'+ba')\sqrt{2}$ d'où $\phi(x\times x')=(aa'+2bb')-(ab'+ba')\sqrt{2}$ et $\phi(x)\times\phi(x')=(a-b\sqrt{2})(a'-b'\sqrt{2})=(aa'+2bb')-(ab'+ba')\sqrt{2}$. On a bien $\phi(x\times x')=\phi(x)\times\phi(x')$.
   (c) $\phi(1)=1$.
   (d) On vérifie facilement que $\phi^2=\mathrm{id}_A$. Par conséquent, ϕ est bijectif.

b. On vérifie que $N(x)=x\times\phi(x)$.

c. Soient $(x,y)\in A^2$. D'après b, $N(x\times y)=(x\times y)\times\phi(x\times y)$ mais puisque ϕ est un morphisme d'anneaux, $N(x\times y)=x\times y\times\phi(x)\times y=N(x)\times N(y)$.

$\boxed{Q\ 18}$

a. $(B,\times)$ est un groupe: c'est le groupe des unités de l'anneau A.

b. $(i)\Rightarrow(ii)$: comme $x\in B$, il existe $x'\in A$ tel que $x\times x'=1$, mais alors $N(x\times x')=1$ et alors d'après Q17c, $N(x)\times N(x')=1$. Comme $N(x)$ et $N(x')$ sont des entiers, il sont inversibles dans $\mathbb{Z}$ et donc $N(x),N(x')\in\{-1,1\}$. Montrons $(ii)\Rightarrow(i)$. Si $N(x)=1$, on a d'après Q17b, $x\times\phi(x)=1$ ce qui montre que x est inversible et que $x^{-1}=\phi(x)$. De même, si $N(x)=-1$, puisque ϕ est un morphisme, $x\times\phi(-x)=1$ et donc x est inversible avec $x^{-1}=\phi(-x)$. Remarquez l'analogie avec les complexes: $N(x)$ correspond à $|z|^2$ et $\phi(x)$ à $\overline{z}$. La formule qui donne l'inverse d'un complexe est $1/z=\overline{z}/|z|^2$ et ici $x^{-1}=\phi(x)/N(x)$.

$\boxed{Q\ 19}$

a. On calcule $N(1+\sqrt{2})=-1$ et on applique b. pour trouver que $(1+\sqrt{2})^{-1}=\phi(-1-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$.

b. Puisque $N(1+\sqrt{2})=-1$, et que $N(x\times y)=N(x)\times N(y)$, on vérifie que $N\big((1+\sqrt{2})^n\big)=(-1)^n\in\{-1,1\}$ et donc que $(1+\sqrt{2})^n$ est inversible d'après b. Même chose pour $-(1+\sqrt{2})^n$.

$\boxed{Q\ 20}$

a. Comme $(a+b\sqrt{2})\in B$, on doit avoir $N(a+b\sqrt{2})=a^2-2b^2\in\{-1,1\}$ d'après la question précédente. Si l'on avait $a<b$, on aurait $a^2-2b^2<-b^2$ et comme $b\geq 1$, on aurait $a^2-2b^2<-1$ ce qui est impossible. De même, si l'on avait $a\geq 2b$, on aurait $a^2-2b^2\geq 2b^2\geq 2$ ce qui est impossible.

b. On a $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=(a+b\sqrt{2})\times(-1+\sqrt{2})$ avec $(a+b\sqrt{2})\in B$ et $(-1+\sqrt{2})\in B$. Comme $(B,\times)$ est un groupe, le produit de ces deux éléments est dans B. On a $a_1=2b-a$ et $b_1=a-b$. Comme d'après a, $b\leq a<2b$, il vient que $0<a_1=2b-a\leq a$ et que $0\leq b_1=a-b<b$.

c. Montrons le résultat par récurrence forte sur b:

$$\mathcal{P}(b)\ :\forall a\in\mathbb{N},\ (a+b\sqrt{2})\in B\Rightarrow\exists k\in\mathbb{N}\text{ tel que } a+b\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^k$$

$\mathcal{P}(0)$: Soit $a \in \mathbb{N}$. Supposons que $a \in B$. D'après la question 18, $N(a) = a^2 \in \{-1,1\}$ et donc $a = 1$. En posant $k = 0$, on a bien $(a + 0 \times \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^0$. Montrons que $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(b-1) \Rightarrow \mathcal{P}(b)$. Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $(a + b\sqrt{2}) \in B$. D'après b), $a_1 + b_2\sqrt{2} = \dfrac{a + b\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \in B$, avec $0 \leq b_1 < b$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $(a_1 + b_1\sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^k$, mais alors $(a + b\sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^{k+1}$.

$\boxed{Q\ 21}$ Montrons que $B = \{(1 + \sqrt{2})^k;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-(1 + \sqrt{2})^k;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Soit $x \in B$. il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x = a + b\sqrt{2}$.

- Si $a = 0$ ou $b = 0$, puisque $N(x) = \pm 1$, il vient que $x = \pm 1 = \pm(1 + \sqrt{2})^0$.
- Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, d'après la question 20, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = (1 + \sqrt{2})^k$.
- Si $a < 0$ et $b < 0$, puisque $N(-x) = N(x) = \pm 1$, $-x$ est également inversible et comme $-a \in \mathbb{N}$, $-b \in \mathbb{N}$, d'après la question 20, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $-x = (1 + \sqrt{2})^k$. Par conséquent, $x = -(1 + \sqrt{2})^k$.
- Si $a \geq 0$ et $b < 0$, considérons $y = \phi(x) = a - b\sqrt{2}$. Puisque $x\phi(x) = N(x) = \pm 1$, $\phi(x)$ est inversible et d'après la question 20, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(x) = (1 + \sqrt{2})^k$. Mais alors $x = \pm(1 + \sqrt{2})^{-k}$.
- Si $a < 0$ et $b \geq 0$, en considérant $y = -\phi(x) \in B$, on montre que $x = \pm(1 + \sqrt{2})^{-k}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On a montré l'inclusion $\subset$. L'autre inclusion a été vérifiée à la question 19