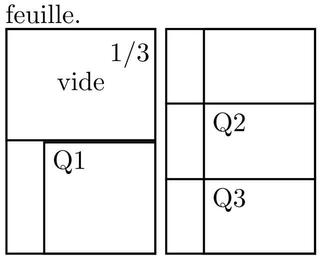
MPSI 2
DS 03

le 20 novembre 2002

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Problème

Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant :

- (H1) : f est dérivable en 0.
- (H2) : $a = f'(0) > 0$.
- (H3) : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $1 + xy \neq 0$, $f(x)f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

On considère une telle fonction f.

Q 1

a. Montrer que $f(0) = 1$.
b. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Q 2

a. Montrer que $\forall x \in]-1,1[^2$, $f(x) \neq 0$.

Q 3

a. Étudier la fonction $\theta : \begin{cases}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{cases}$.
b. Montrer que $\forall t \in]-1,1[$, $f(t) > 0$.

Q 4

a. Montrer que $f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} ax$.
b. En déduire qu'il existe un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\begin{cases} \forall x \in]-\alpha,0[, & f(x) < 1 \\ \forall x \in]0,\alpha[, & f(x) > 1 \end{cases}$.

Q 5

a. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,1[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.
b. En déduire que la fonction f n'est pas continue au point 1.

Q 6 On considère un réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$.

a. Déterminer explicitement un nombre $M(x) > 0$ tel que pour tout réel h avec $|h| < M(x)$, il existe un réel y tel que $x + h = \dfrac{x+y}{1+xy}$. On donnera l'expression de y en fonction de h.
b. Pour $|h| < M(x)$, former le taux d'accroissement de f entre x et $x + h$, montrer que f est dérivable au point x et calculer $f'(x)$.

Q 7 On définit les intervalles $I_1 =]-\infty,-1[$, $I_2 =]-1,1[$ et $I_3 =]1,+\infty[$.

a. On considère la fonction g définie par :

$$g_k : \begin{cases} I_1 \cup I_2 \cup I_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} \times f(x) \end{cases}$$

Calculer sa dérivée sur chacun des trois intervalles I_k.

b. En déduire qu'il existe trois constantes C_1,C_2,C_3 telles que

$$\forall x \in I_k,\ f(x) = C_k e^{\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$$

$\boxed{Q\ 8}$

a. Déterminer la constante C_2.
b. Montrer que C_1 et C_3 sont de même signe.
c. Montrer que $C_3 \in \{-1,1\}$.
d. En déduire les fonction f possibles.

$\boxed{Q\ 9}$ Vérifier réciproquement que les fonctions trouvées avec $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ convient. (On ne demande pas d'examiner les fonctions avec $C_1 = C_3 = -1$).

2 Exercice 1

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui est T-périodique et un réel $a > 0$.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer qu'il existe $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

$\boxed{Q\ 11}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que la tangente à la courbe représentative de f au point x coupe le graphe de f au point $\big(x+a,f(x+a)\big)$. Trouver une relation entre $f(x)$, $f(x+a)$ et $f'(x)$.

$\boxed{Q\ 12}$ Montrer qu'il existe un réel x possédant cette propriété.

3 Exercice 2

$\boxed{Q\ 13}$ On considère pour un entier $n \geq 1$ la fonction

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{n-1}e^{1/x} \end{array} \right.$$

Montrer que $\forall x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}$$

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$

a. En prenant $x = y = 0$ dans la relation H3, on trouve que $f(0)^2 = f(0)$, c'est à dire $f(0)\big[f(0) - 1\big] = 0$. Par conséquent, $f(0) = 0$ ou bien $f(0) = 1$. Si l'on avait $f(0) = 0$, alors pour $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = 0$ dans la relation (H3), on aurait $f(x)f(0) = f(x)$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$$

La fonction f serait constante mais alors $f'(0) = 0$ ce qui est absurde d'après H2. En conclusion, $f(0) = 1$.

b. En prenant $x = y = 1$ dans la relation H4, on trouve que $f(1)^2 = f(1)$ et donc $f(1) = 0$ ou bien $f(1) = 1$. Si l'on avait $f(1) = 1$, soit $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = 1$ dans la relation, on trouve que $f(x)f(1) = f(1)$ c'est à dire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ mais alors $f'(0) = 0$ ce qui est impossible. Par conséquent, $\boxed{f(1) = 0}$. On démontre de même (en prenant $x = y = -1$ dans la relation) que $\boxed{f(-1) = 0}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in]-1,1[$ tel que $f(x_0) = 0$. En prenant $x = -x_0$ et $y = x_0$ dans la relation H3, (c'est possible puisque comme $x_0 \notin \{-1,1\}$, $1 - x_0^2 \neq 0$), on trouve que $f(-x_0)f(x_0) = f(0)$ d'où l'on tire $f(0) = 0$, ce qui est faux d'après Q1.

$\boxed{Q\ 3}$

a. La fonction θ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $\theta'(x) = 2\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} > 0$. Par conséquent, cette fonction est strictement croissante sur l'intervalle $]-1,1[$. Dresser son tableau de variations. Elle réalise donc une bijection de $]-1,1[$ vers $]-1,1[$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. En prenant $y = x$ dans H3, on trouve que $f(x)^2 = f\big(\frac{2x}{1+x^2}\big)$. Soit alors $t \in]-1,1[$. D'après a), il existe un unique $x \in]-1,1[$ tel que $t = \theta(x)$. On a alors

$$f(t) = f\Big(\frac{2x}{1 + x^2}\Big) = f(x)^2 \geq 0$$

Comme on a vu de plus que f ne s'annulait pas en dehors de 1 et -1, il vient que $f(t) > 0$.

$\boxed{Q\ 4}$

a. Puisque f est dérivable en 0, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 : il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Puisque $f(0) = 1$ (question 1) et que $f'(0) = a$, on a donc $f(x) - 1 = ax + x\varepsilon(x)$. Comme $x\varepsilon(x) = o(ax)$, il vient que $f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} ax$.

b. Il existe donc un voisinage de 0, de la forme $]-\alpha,\alpha[$ sur lequel $f(x) - 1$ et ax ont même signe, d'où le résultat demandé.

$\boxed{Q\ 5}$

a. C'est une étude classique d'une suite récurrente. Voir le cours. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \theta(u_n)$ où θ est la fonction de la question 3. On vérifie facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$, puis que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle converge donc vers une limite $l \in \mathbb{R}$ qui doit vérifier $\theta(l) = l$, avec $u_0 \leq l \leq 1$. Donc $l = 1$.

b. Par l'absurde, supposons f continue au point 1. On remarque en utilisant H3 avec $x = y = u_n$ que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(u_{n+1}) = f(u_n)^2$$

Avec une récurrence facile, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = f(u_0)^{2^n}$$

Mais si l'on prend $u_0 \in]0,\alpha[$, avec $u_0 < 1$, d'après la question 4, on a $f(u_0) > 1$ et alors

$$f(u_n) = f(u_0)^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

D'autre part, puisque f est continue au point 1, $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} f(1)$. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, d'après un théorème, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$, une absurdité.

$\boxed{Q\ 6}$

a. Posons $\boxed{M(x) = \left|\dfrac{1-x^2}{x}\right|}$. Soit alors un réel h tel que $|h| < M(x)$. Posons $\boxed{y = \dfrac{h}{1-x^2-xh}}$. Le dénominateur n'est pas nul puisque $|xh| < |1-x^2|$. On a bien la relation voulue.

b. Soit h un accroissement tel que $|h| < M(x)$. Formons le taux d'accroissement

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{f(\frac{x+y}{1+xy}) - f(x)}{h} \\ &= f(x)\Big[\frac{f(y)-1}{h}\Big] \\ &= f(x)\Big[\frac{f(\frac{h}{1-x^2-hx}) - f(0)}{h}\Big] \\ &= \frac{f(x)}{1-x^2-hx}\Big[\frac{f(\frac{h}{1-x^2-hx}) - f(0)}{\frac{h}{1-x^2-hx}}\Big] \\ &= \frac{f(x)}{1-x^2-hx}\Delta_0 f(\phi(h))\end{aligned}$$

où $\phi(h) = \dfrac{h}{1-x^2-hx} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. et $\Delta_0(f)(t) = \dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ est le taux d'accroissement de f en 0 qui tend vers $a = f'(0)$ lorsque $t \to 0$ puisque f est dérivable en 0. Par composée de limites, il vient que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{af(x)}{1-x^2}$$

Par conséquent, la fonction f est dérivable au point x et $f'(x) = \dfrac{af(x)}{1-x^2}$. On remarque que le résultat reste valable pour $x = 0$.

$\boxed{Q\ 7}$

a. Comme on a montré que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, la fonction g est dérivable sur les trois intervalles I_k et $\forall x \in I_k$,

$$g'(x) = e^{-\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}\Big[f'(x) - \frac{a}{2}\frac{1+x}{1-x}\frac{2}{1-x^2}f(x)\Big] = e^{-\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}\Big[f'(x) - \frac{a}{1-x^2}f(x)\Big] = 0$$

b. La fonction g est donc constante sur chacun des intervalles. Il existe donc trois constantes C_1,C_2,C_3 telles que $\forall x \in I_k$, $g(x) = C_k$, mais alors $\forall x \in I_k$, $f(x) = e^{-\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}g(x)$ d'où le résultat.

$\boxed{Q\ 8}$

a. Comme $f(0) = 1$, et $f(0) = C_2$, il vient que $\boxed{C_2 = 1}$.

b. Considérons un réel $x > 1$. D'après H3 avec $y = -x$, on a $f(x)f(-x) = f(0) = 1$. On calcule $f(x)f(-x)$ et on trouve que $C_1C_3 = 1$. Ces deux constantes sont de même signe.

c. Soit $x > 1$. D'après H3, avec $y = x$, on a $f(x)^2 = f\big(\frac{2x}{1+x^2}\big)$. Comme $\dfrac{2x}{1+x^2} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, on peut trouver un réel $x > 1$ grand tel que $\dfrac{2x_1}{1+x_1^2} \in]0,1]$ Alors en calculant $f(x)^2$ (expression avec C_3) et $f\big(\frac{2x}{1+x^2}\big)$ (expression avec $C_2 = 1$), on trouve que $C_3^2 = 1$. Par conséquent, $C_3 = \pm 1$. Comme C_1 et C_3 sont de même signe, $C_1 = C_3 = \pm 1$.

d. La fonction f est donc l'une des deux fonctions

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{a}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} & \text{si } x \notin \{-1,1\} \\ 0 & \text{si } x \in \{-1,1\} \end{cases} \end{cases}$$

ou bien

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{a}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} & \text{si } |x| < 1 \\ -e^{-\frac{a}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| = 1 \end{cases} \end{cases}$$

où a est un réel arbitraire strictement positif.

$\boxed{Q\ 9}$ La fonction f_1 est dérivable en 0 et on calcule pour $x \notin \{-1,1\}$,

$$f_1'(x) = \frac{a}{2} e^{\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|} \frac{1-x}{1+x} \frac{2}{(1-x)^2} = a e^{\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|} \frac{1}{1-x^2}$$

Par conséquent, $f_1'(0) = a > 0$. Soit alors $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $1 + xy \neq 0$. Si $x = 1$, on a $f(x)f(y) = 0$ et $f(\frac{x+y}{1+xy}) = f(1) = 0$. De même si $x = -1$ et si $y \in \{-1,1\}$. Si $x \notin \{-1,1\}$ et $y \notin \{-1,1\}$, on calcule

$$f(x)f(y) = e^{\frac{a}{2}\ln\left|\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}\right|} = e^{\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}\right|}$$

et

$$f(\frac{x+y}{1+xy}) = e^{\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}\right|} = e^{\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}\right|}$$

On a bien H3.

$\boxed{Q\ 10}$ La fonction f est continue sur le segment $[0,T]$. On sait d'après un théorème qu'elle possède un maximum et un minimum sur ce segment : il existe $(x_1,x_2) \in [0,T]^2$ tels que $\forall x \in [0,T]$, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Soit alors $x \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $kT \leq x < (k+1)T$. Posons $y = x - kT$. On a $y \in [0,T]$ et alors $f(x) = f(x - kT) = f(y)$. Mais alors $f(x_1) \leq f(y) = f(x) \leq f(x_2)$.

$\boxed{Q\ 11}$ L'équation de la tangente de C_f au point x est :

$$Y = f(x) + (X - x)f'(x)$$

Dire que cette droite rencontre le graphe de f au point $x + a$ s'écrit

$$f(x+a) = f(x) + af'(x)$$

$\boxed{Q\ 12}$ Cela revient à montrer l'existence d'un réel $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\phi(x) = f(x+a) - f(x) - af'(x) = 0$. Puisque f présente un maximum relatif en x_1 et que f est dérivable en ce point $f'(x_1) = 0$. De même, $f'(x_2) = 0$. On a alors, puisque $f(x_1 + a) \geq f(x_1)$,

$$\phi(x_1) = f(x_1 + a) - f(x_1) \geq 0$$

et comme $f(x_2 + a) \leq f(x_2)$,

$$\phi(x_2) = f(x_2 + a) - f(x_2) \leq 0$$

Comme $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $\phi(x_1) \leq 0$ et $\phi(x_2) \geq 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point $x \in [x_1,x_2]$ tel que $\phi(x) = 0$.

$\boxed{Q\ 13}$ Montrons le résultat par récurrence. Pour $n = 1$, et $x > 0$, $f_1(x) = e^{1/x}$ et donc $f_1'(x) = -\dfrac{1}{x}e^{1/x}$.
Montrons $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Soit $x > 0$. Écrivons $f_{n+1}(x) = x \times f_n(x)$ et utilisons la formule de Leibniz :

$$f^{(n+1)}(x) = \binom{n+1}{0} x f_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} f_n^n(x)$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a l'expression de $f_n^{(n)}$ et donc

$$f_n^{(n+1)}(x) = (f_n^{(n)})'(x) = (-1)^n e^{1/x}\Big[-\frac{(n+1)}{x^{n+2}} - \frac{1}{x^{n+3}}\Big]$$

En remplaçant,

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (-1)^n e^{1/x}\Big[-\frac{n+1}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^{n+2}}\Big] + (n+1)(-1)^n e^{1/x}\frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^{n+1} e^{1/x}\frac{1}{x^{n+2}}$$