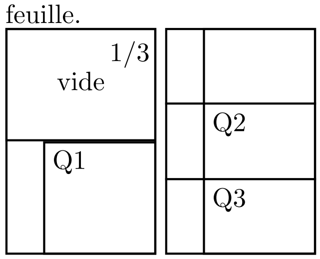
MPSI 2
DS 01

le 5 octobre 2002

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Exercice 1

On considère une application $f : E \mapsto E$ vérifiant $f \circ f = f$.

$\boxed{Q\ 1}$ Montrer que $\big(\underbrace{f \text{ injective }}_{(i)}\big) \iff \big(\underbrace{f \text{ surjective }}_{(ii)}\big)$.

$\boxed{Q\ 2}$ Soit une partie $A \subset E$. Montrer que $f\big(f(A)\big) = f(A)$.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit une partie $A \subset E$. Montrer que $f^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) = f^{-1}(A)$.

2 Exercice 2

On considère l'ensemble $E = [0,1] \subset \mathbb{R}$. On dit qu'une application $f : E \mapsto E$ est *croissante* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

On dit que f est *sup-continue* si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A \neq \emptyset \Rightarrow f(\sup A) = \sup f(A)$$

$\boxed{Q\ 4}$ Justifier que la définition de f sup-continue est correcte.

$\boxed{Q\ 5}$ Soient deux applications $f : E \mapsto E$ et $g : E \mapsto E$ qui sont sup-continues.

a. Si $A \subset E$, vérifier que $(g \circ f)(A) = g\big(f(A)\big)$.
b. En déduire que $g \circ f$ est sup-continue.

$\boxed{Q\ 6}$ Montrer que si une application $f : E \mapsto E$ est croissante, alors pour toute partie $A \subset E$ non-vide, on a $\sup f(A) \leq f(\sup A)$.

$\boxed{Q\ 7}$ Exhiber un exemple d'application $f : E \mapsto E$ qui est croissante mais qui n'est pas sup-continue.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrer que si $f : E \mapsto E$ est sup-continue, alors f est croissante.

On considère désormais une application $f : E \mapsto E$ qui est sup-continue. On notera

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$$

l'ensemble des points fixes de f. On notera

$$X = \{x \in E \mid f(x) \leq x\}$$

$\boxed{Q\ 9}$ Montrer que X possède une borne inférieure $\alpha \in E$

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer que α est le plus petit élément de $\mathrm{Fix}(f)$.

On définit l'ensemble $Y = \{f^n(0);\ n \in \mathbb{N}\}$ où $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.

$\boxed{Q\ 11}$ Justifier que Y possède une borne supérieure $\beta \in E$.

$\boxed{Q\ 12}$ Montrer que $f(Y) = \{f^n(0);\ n \in \mathbb{N}^\star\}$ et que $\sup Y = \sup f(Y)$.

$\boxed{Q\ 13}$ Montrer que $\beta = \alpha$.

3 Exercice 3

On fixe un entier $k \geq 3$ et k nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$. On définit alors par récurrence la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante. Pour $j \in [\![0, k-1]\!]$, $x_j = a_j$ et $\forall n \geq 0$, x_{n+k} est la moyenne des k termes précédents de la suite (x_n) :

$$x_{n+k} = \frac{x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{n+k-1}}{k}$$

On définit pour $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n = \max(x_n, x_{n+1}, \dots x_{n+k-1})$$
$$m_n = \min(x_n, x_{n+1}, \dots x_{n+k-1})$$

$\boxed{Q\ 14}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$m_n \leq x_{n+k} \leq M_n$$

En déduire que les deux suites (M_n) et (m_n) sont monotones dont on précisera le sens de variation.

$\boxed{Q\ 15}$ Montrer que la suite (M_n) converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$, que la suite (m_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ et que $l \leq L$.

$\boxed{Q\ 16}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+k} \geq \frac{M_n + (k-1)m_n}{k}$$

$\boxed{Q\ 17}$ On montre dans cette question que $L = l$ par l'absurde. Supposons donc que le nombre $\varepsilon = L - l$ est strictement positif.

a. Montrer qu'il existe $n_0 > 0$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$m_n \geq l - \frac{\varepsilon}{k}$$

b. Montrer qu'alors $\forall n \geq n_0$,

$$x_{n+k} \geq l + \frac{\varepsilon}{k^2}$$

c. En déduire alors que $\forall j \geq n_0 + k$,

$$m_j \geq l + \frac{\varepsilon}{k^2}$$

Conclure.

$\boxed{Q\ 18}$ Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite finie x.

On définit maintenant la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) x_{n+j} = x_n + 2x_{n+1} + 3x_{n+2} + \cdots + kx_{n+k-1}$$

$\boxed{Q\ 19}$ Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} - y_n$. En déduire que (y_n) converge vers une limite à préciser.

$\boxed{Q\ 20}$ En déduire la limite de la suite (x_n).

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$

$(i) \Rightarrow (ii)$: soit $y \in E$. Puisque $f \circ f = f$, $f(y) = f\big(f(y)\big)$. Or f est injective, donc $y = f(y)$. Posons $x = f(y)$, on a $y = f(x)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: soient $(x_1,x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Comme f est surjective, il existe $(x_1',x_2') \in E^2$ tels que $x_1 = f(x_1')$ et $x_2 = f(x_2')$. On a donc $f\big(f(x_1')\big) = f\big(f(x_2')\big)$. Puisque $f \circ f = f$, on en tire que $f(x_1') = f(x_2')$ c'est à dire $x_1 = x_2$.

$\boxed{Q\ 2}$

$\subset$: soit $y \in f(A)$. Par définition de l'image directe, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $f \circ f = f$, $y = f\big(f(x)\big)$. Posons $z = f(x)$. On a $x \in A$ avec $z = f(x)$, et donc $z \in f(A)$ (définition de l'image directe). Puisque $y = f(z)$ avec $z \in f(A)$, on en déduit que $y \in f\big(f(A)\big)$ (définition de l'image directe).

$\supset$: soit $z \in f\big(f(A)\big)$. Par définition de l'image directe, $\exists y \in f(A)$ tel que $z = f(y)$. Comme $y \in f(A)$, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$ (définition de l'image directe). Alors $z = f\big(f(x)\big) = f \circ f(x)$. Mais puisque $f \circ f = f$, on a $z = f(x)$. Comme $z = f(x)$ avec $x \in A$, on en déduit que $z \in f(A)$ (définition de l'image directe).

$\boxed{Q\ 3}$

$\subset$: soit $x \in f^{-1}\big(f^{-1}(A)\big)$. Par définition de l'image réciproque, on a $f(x) \in f^{-1}(A)$. Par définition de l'image réciproque, on a donc $f(f(x)) \in A$. Mais comme $f \circ f = f$, on en tire que $f(x) \in A$, c'est à dire $x \in f^{-1}(A)$ (définition de l'image réciproque).

$\supset$: soit $x \in f^{-1}(A)$. Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in A$. Puisque $f \circ f = f$, on en tire que $f(f(x)) = f(x) \in A$. Par conséquent, $f(x) \in f^{-1}(A)$ (définition de l'image réciproque) et ensuite $x \in f^{-1}(f^{-1}(A))$ (définition de l'image réciproque).

$\boxed{Q\ 4}$

Soit une partie $A \subset E$ non-vide.
Justifions l'existence de $f(\sup A)$. Comme A est majorée par 1, $\sup A$ existe. Puisque $A \subset [0,1]$, 1 est un majorant de $\sup A$ et donc $\sup A \leq 1$. De même, puisque $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$. Puisque $a \in [0,1]$, $0 \leq a \leq \sup A$ ce qui montre que $0 \leq \sup A$. En définitive, $\sup A \in E$ et donc $f(\sup A)$ a bien un sens.
Justifions également l'existence de $\sup f(A)$. Puisque $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$ et alors $f(a) \in f(A)$. Par conséquent, $f(A) \neq \emptyset$ et puisque f est à valeurs dans E, $f(A)$ est majorée par 1. Donc $\sup f(A)$ existe également.

$\boxed{Q\ 5}$

a.
- Montrons que $(g \circ f)(A) \subset g\big(f(A)\big)$. Soit $z \in (g \circ f)(A)$. Par définition de l'image directe, il existe $x \in A$ tel que $z = [g \circ f](x) = g\big(f(x)\big)$. Posons $y = f(x)$. Puisque $x \in A$, par définition de l'image directe, $y \in f(A)$. Puisque $z = g(y)$ avec $y \in f(A)$, par définition de l'image directe, $z \in g(f(A))$.
- Montrons que $g\big(f(A)\big) \subset (g \circ f)(A)$. Soit $z \in g\big(f(A)\big)$. Par définition de l'image directe, il existe $y \in f(A)$ tel que $z = g(y)$. Par définition de l'image directe $f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Alors $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$. Comme $x \in A$ et $z = [g \circ f](x)$, il vient que $z \in [g \circ f](A)$.

b. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E non-vide. Montrons que $[g \circ f](\sup A) = \sup[g \circ f](A)$. Puisque $[g \circ f](A) = g\big(f(A)\big)$ et que g est sup-continue, il vient que $\sup[g \circ f](A) = g\big(\sup f(A)\big)$. Mais puisque f est sup-continue, il vient que $\sup f(A) = f(\sup A)$. Par conséquent, $\sup[g \circ f](A) = g\big(f(\sup A)\big) = [g \circ f](\sup A)$.

$\boxed{Q\ 6}$ Soit $y \in f(A)$. Par définition de l'image directe, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $\sup A$ est un majorant de A, on a $x \leq \sup A$ et comme f est croissante, on tire $f(x) \leq f(\sup A)$. Par passage à la borne supérieure, il vient donc que $\sup f(A) \leq f(\sup A)$.

$\boxed{Q\ 7}$ Considérons l'application (voir la figure 1) :

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ (x+1)/2 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

L'application f est croissante (vérification facile). Considérons la partie $A = [0,1/2[$. Elle est

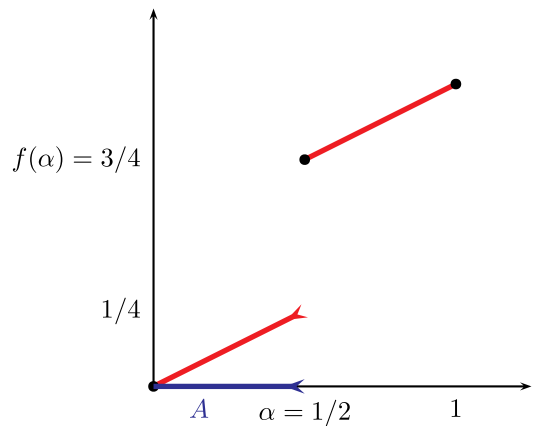


FIG. 1 – *Une fonction croissante non sup-continue*

non-vide et $\sup A = 1/2$. On calcule $f(A) = [0,1/4[$ et donc $\sup f(A) = 1/4$. Mais pourtant $f(\sup A) = f(1/2) = 3/4$. Par conséquent, $f(\sup A) \neq \sup f(A)$.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrons que f est croissante. Soient $(x,y) \in E^2$ tels que $x \leq y$. Posons $A = \{x,y\}$. La partie A n'est pas vide et $\sup A = y$. On vérifie facilement que $f(A) = \{f(x),f(y)\}$. Puisque f est sup-continue, $\sup f(A) = f(\sup A)$. Par conséquent, $\sup f(A) = f(y)$, et donc $f(x) \leq f(y)$ (car $\sup f(A)$ est un majorant de $f(A)$ et $f(x) \in f(A)$).

$\boxed{Q\ 9}$ Vérifions que $X \neq \emptyset$. Puisque $f : E \mapsto E$, on a $f(1) \leq 1$ ce qui montre que $1 \in X$. La partie X est non-vide et majorée par 1 donc elle admet une borne supérieure $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque $X \subset [0,1]$, il vient que $\alpha \in [0,1]$.

$\boxed{Q\ 10}$

1. Montrons que $\alpha \in \mathrm{Fix}(f)$.
   (a) Montrons que $f(\alpha)$ est un minorant de X. Soit $x \in X$. Comme $\alpha = \inf X$, $\alpha \leq x$. Puisque f est sup-continue, on sait d'après Q8 que f est croissante. Par conséquent, $f(\alpha) \leq f(x)$ et comme $x \in X$, $f(x) \leq x$ et donc $f(\alpha) \leq f(x) \leq x$.
   (b) Montrons que $f(\alpha) \leq \alpha$. Puisque $\alpha = \inf X$, α est le plus grand minorant de X. Comme on a vu que $f(\alpha)$ était un minorant de X, il vient que $f(\alpha) \leq \alpha$.
   (c) Montrons que $\alpha \leq f(\alpha)$. On a vu que $f(\alpha) \leq \alpha$. Comme f est croissante, $f(f(\alpha)) \leq f(\alpha)$ ce qui montre que $f(\alpha) \in X$. Mais puisque α est un minorant de X, il vient que $\alpha \leq f(\alpha)$.

   On a montré que $f(\alpha) = \alpha$, c'est à dire $\alpha \in \mathrm{Fix}(f)$.
2. Montrons que si $\beta \in \mathrm{Fix}(f)$, alors $\alpha \leq \beta$. Puisque $f(\beta) = \beta$, on a $f(\beta) \leq \beta$ et donc $\beta \in X$. Mais puisque $\alpha = \inf X$, il vient que $\alpha \leq \beta$.

Remarque : on a en fait montré que $\alpha \in X$, et donc que $\alpha = \min X$.

$\boxed{Q\ 11}$ Puisque $0 = f^0(0) \in Y$, l'ensemble Y est non-vide. Puisque $f : [0,1] \mapsto [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(0) \in [0,1]$ ce qui montre que Y est majoré par 1. Par conséquent, Y possède une borne supérieure $\beta \in \mathbb{R}$. Comme $Y \subset [0,1]$, $\beta \in [0,1]$.

$\boxed{Q\ 12}$ Montrons que $f(Y) = \{f^n(0);\ n \in \mathbb{N}^\star\}$

1. $\subset$: soit $y \in f(Y)$. Par définition de l'image directe, il existe $x \in Y$ tel que $y = f(x)$. Par définition de Y, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x = f^p(0)$. Alors $y = f(x) = f^{p+1}(0)$. Posons $n = p + 1 \in \mathbb{N}^\star$, on a $y = f^n(0)$ et donc $y \in \{f^n(0);\ n \in \mathbb{N}^\star\}$.

2. $\supset$: soit $y \in \{f^n(0);\ n \in \mathbb{N}^\star\}$. Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $y = f^n(0)$. Posons $x = f^{n-1}(0) \in Y$, on a bien $y = f(x)$ et donc $y \in f(Y)$.

Il est clair que $f(Y) \subset Y$ et donc que $\sup f(Y) \leq \sup Y$. Soit ensuite $x \in Y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = f^n(0)$. Si $n \neq 0$, $x \in f(Y)$ et donc $x \leq \sup f(Y)$. Si $n = 0$, $x = f^0(0) = 0 \leq \sup f(Y)$ (puisque $f(Y) \subset [0,1]$). Nous avons montré que $\sup f(Y)$ était un majorant de Y et donc $\sup Y \leq \sup f(Y)$. En conclusion, $\sup Y = \sup f(Y)$.

Q 13

1. Montrons que $\beta \in \mathrm{Fix}(f)$. Puisque l'application f est sup-continue, et que $Y \neq \emptyset$, on a $\sup f(Y) = f(\sup Y)$, c'est à dire $\sup f(Y) = f(\beta)$. Mais comme on a vu à la question précédente que $\sup f(Y) = \sup Y = \beta$, on a $f(\beta) = \beta$, ce qui montre que $\beta \in \mathrm{Fix}(f)$. Comme α est le plus petit point fixe de f, on a donc $\alpha \leq \beta$.
2. Montrons par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(0) \leq \alpha$$
   (a) $\mathcal{P}(0)$: $f^0(0) = 0 \leq \alpha$ puisque $\alpha \in [0,1]$.
   (b) $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: d'après l'hypothèse de récurrence, $f^n(0) \leq \alpha$. Comme f est croissante, il vient $f(f^n(0)) \leq f(\alpha)$, mais comme α est un point fixe, $f^{n+1}(0) \leq \alpha$.
3. Nous avons donc montré que α était un majorant de Y et puisque $\beta = \sup Y$, il vient que $\beta \leq \alpha$.

En conclusion, $\alpha = \beta$.

Q 14 Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de M_n, $x_n, \dots, x_{n+k-1} \leq M_n$ et donc
$$x_{n+k} \leq \frac{kM_n}{k} \leq M_n$$
De même,
$$x_{n+k} \geq \frac{km_n}{k} \geq m_n$$
Montrons que la suite (M_n) est *décroissante*. Soit $n \in \mathbb{N}$. puisque nous avons vu que $x_{n+k} \leq M_n$ et que par définition de M_n, $x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1} \leq M_n$, il vient que
$$M_{n+1} = \max(x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq M_n$$
De même, $m_{n+1} \geq m_n$ donc la suite (m_n) est *croissante*.

Q 15 Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque
$$m_n = \min(x_n, \dots, x_{n+k-1}) \leq \max(x_n, \dots, x_{n+k-1}) = M_n$$
et d'après la question précédente,
$$m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_{n-1} \leq m_n \leq M_n \leq M_{n-1} \dots \leq M_1 \leq M_0$$
la suite (m_n) est croissante et majorée par M_0. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge. De même, (M_n) est décroissante et minorée par m_0 et donc elle converge. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_n \leq M_n$ et que $m_n \to l$, $M_n \to L$, par passage à la limite dans les inégalités, $l \leq L$.

Q 16 Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque M_n est le plus grand élément de $\{x_n, \dots, x_{n+k-1}\}$, il existe $j \in [n, n+k-1]$ tel que $M = x_j$. Alors
$$x_{n+k} = \frac{x_n + \dots + x_j + \dots + x_{n+k-1}}{k} = \frac{x_1 + \dots + M_n + \dots + x_{n+k-1}}{k} \geq \frac{(k-1)m_n + M_n}{k}$$
car tous les autres $x_p, p \in [\![n, n+k-1]\!] \setminus \{j\}$ sont plus grands que m_n par définition de m_n.

Q 17

a. Posons $k = l - \dfrac{\varepsilon}{k}$. Comme $k < l$ et que (m_n) converge vers l, d'après un théorème du cours, il existe un rang n_0 à partir duquel $m_n \geq k$.

b. Comme (M_n) est une suite décroissante qui converge vers L, on sait d'après le théorème de la limite monotone que $L = \inf\{M_n ; n \in \mathbb{N}\}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n \geq L \geq l + \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq n_0$. D'après la question précédente et d'après a), on minore alors :

$$x_{n+k} \geq \frac{M_n + (k-1)m_n}{k} \geq \frac{l + \varepsilon + (k-1)(l - \frac{\varepsilon}{k})}{k} = l + \frac{\varepsilon}{k^2}$$

c. Soit $j \geq n_0 + k$. Posons $n = j - k \geq n_0$. Alors d'après b),

$$x_j = x_{n+k} \geq l + \frac{\varepsilon}{k^2}$$

Mais alors

$$m_j = \min(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k-1}) \geq l + \frac{\varepsilon}{k^2}$$

Puisque (m_j) converge vers l, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on en déduit que

$$l \geq l + \frac{\varepsilon}{k^2} > l$$

une absurdité. Par conséquent, $l < L$ est faux et donc $l \geq L$. Comme on sait déjà que $l \leq L$, il vient que $l = L$.

$\boxed{Q\ 18}$ Grâce au théorème des gendarmes et à la question 14.

$\boxed{Q\ 19}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons

$$\begin{aligned} y_n - y_{n+1} &= (x_n + 2x_{n+1} + \dots + kx_{n+k-1}) - (x_{n+1} + 2x_{n+2} + \dots + (k-1)x_{n+k-1} + kx_{n+k}) \\ &= (x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+k-1}) - kx_{n+k} \end{aligned}$$

qui vaut 0 d'après la définition de x_{n+k}. Par conséquent, la suite (y_n) est constante et converge vers

$$y_0 = \boxed{a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \dots + ka_{k-1}}$$

$\boxed{Q\ 20}$ D'après les théorèmes généraux, (la suite (y_n) est une somme de k termes, k fixé !) la suite (y_n) converge vers $x + 2x + 3x + \dots + kx$ Mais comme elle est constante, elle converge également vers y_0. On en tire la valeur de x : $x = \dfrac{a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \dots + ka_{k-1}}{1 + 2 + 3 + \dots + k}$ ou encore

$$x = \boxed{\frac{2(a_0 + 2a_1 + \dots + ka_{k-1})}{k(k+1)}}$$