$\boxed{\text{MPSI 2 : DL 08}}$

pour le 17 avril 2003

1 Exponentielle de matrices nilpotentes

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On considère une base $B = (e_1,\dots,e_n)$ de E. Pour une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note ϕ_A l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est A.
On notera I la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); A \text{ nilpotente}\}$$
$$\mathcal{T} = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); A \text{ triangulaire supérieure }\}$$
$$\mathcal{U} = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); A - I \in \mathcal{N}\}$$
$$E_k = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$$
$$E_0 = \{0\}$$

Q 1

a. Montrer qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{T}$ si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, E_k est stable par ϕ_A.
b. En utilisant a), montrer que $\mathcal{T}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
c. Soit $A \in \mathcal{T}$. Montrer que A est inversible si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\phi_A(E_k) = E_k$.
d. On note $A = ((a_{ij}))$. Montrer que la condition précédente équivaut à $\forall i \in [\![1,n]\!], a_{ii} \neq 0$.
e. Montrer que si $A \in \mathcal{T} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \mathcal{T}$.

Q 2 Soit une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{T}$ dont les coefficients diagonaux a_{ii} sont tous nuls.
a. Montrer que A est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n.
b. Montrer que l'indice de nilpotence de A est exactement n si et seulement si les coefficients $a_{i,i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ sont tous non-nuls.

Q 3 Soit $A \in \mathcal{N}$.
a. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que PAP^{-1} est nilpotente de même indice que A.
b. En étudiant $\mathrm{Im}\,\phi_A$, montrer qu'il existe une base $u = (u_1,\dots,u_n)$ de E dans laquelle la matrice de ϕ_A a sa dernière ligne nulle.
c. Montrer alors qu'il existe une base $v = (v_1,\dots,v_n)$ de E dans laquelle la matrice de ϕ_A est triangulaire supérieure à diagonale nulle.
d. Que peut-on en déduire sur l'indice de nilpotence de A?
e. Lorsque $n = 2$, trouver une matrice nilpotente non triangulaire.

Q 4 Soient $(A,B) \in \mathcal{N}^2$ vérifiant $AB = BA$.
a. Montrer que $A + B \in \mathcal{N}$.
b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $(A + \lambda B)^n$.
c. Montrer que si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifient $p + q \geq n$, alors $A^p B^q = 0$. On pourra considérer la fonction $P_{ij}(\lambda)$ qui est le coefficient à la ième ligne, jième colonne de la matrice $(A + \lambda B)^n$.

Q 5 Pour $A \in \mathcal{N}$, on définit

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$$

a. Montrer que $\exp(A) \in \mathcal{U}$.
b. Soient $(A,B) \in \mathcal{N}^2$ vérifiant $AB = BA$. Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$.
c. En déduire que $\exp(A)$ est inversible.

2 Déterminant circulant

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} \\ \vdots & a_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_3 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ où $(a_1, \dots a_n) \in \mathbb{C}^n$ sont des nombres complexes.

Pour une racine nième de l'unité $\omega \in \mathbb{C}$, on définit la matrice colonne associée : $X_\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$

$\boxed{Q\ 6}$ Calculer AX_ω.

$\boxed{Q\ 7}$ On considère la racine nième primitive de l'unité notée $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et la matrice colonne $X_k = X_{\omega^k}$ associée. Montrer que le système $(X_0, \dots, X_{n-1})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$\boxed{Q\ 8}$ En déduire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale que l'on déterminera.

$\boxed{Q\ 9}$ En déduire le déterminant de la matrice A.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$

a. Posons $A = ((a_{ij}))$. Alors $\forall j \in [1,n]$, $\phi_A(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$.

- Si $A \in \mathcal{T}$, soit $(j,k) \in [1,n]^2$ avec $j \leq k$. Alors pour $i > j$, $a_{ij} = 0$ donc $\phi_A(e_j) = \sum_{i=1}^j a_{ij}e_i \in E_j \subset E_k$. Comme $(e_1,\dots,e_k)$ est une base de E_k, $(\phi_A(e_1),\dots,\phi_A(e_k))$ engendre $\phi_A(E_k)$ et donc E_k est stable par ϕ_A.
- Réciproquement, si $\forall k \in [1,n]$, $\phi_A(E_k) \subset E_k$, alors $\phi_A(e_k) \in E_k$ et donc tous les coefficients a_{ik} avec $i > k$ sont nuls et donc A est triangulaire supérieure.

b. Il est clair que $\mathcal{T}$ est un sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et que $I \in \mathcal{T}$. Montrons que $\mathcal{T}$ est stable pour la multiplication. Soient $(A,B) \in \mathcal{T}^2$. Posons $C = AB$. Alors pour $k \in [1,n]$, on a :

$$\phi_C(E_k) = \phi_A \circ \phi_B(E_k) = \phi_A(\phi_B(E_k)) \subset \phi_A(E_k) \subset E_k$$

et donc $C \in \mathcal{T}$.

c. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors ϕ_A est un isomorphisme. Sa restriction à E_k est un endomorphisme de E_k (puisque E_k est stable) et $\operatorname{Ker}\phi_{A/E_k} = \operatorname{Ker}\phi_A \cap E_k = \{0\}$. Mais un endomorphisme injectif est bijectif et donc $\forall k \in [1,n]$, $\phi_A(E_k) = E_k$.
Réciproquement, si $\forall k \in [1,n]$, $\phi_A(E_k) = E_k$, en particulier pour $k = n$: $\phi_A(E) = E$ et donc ϕ_A est surjective donc bijective, et par conséquent, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

d. Si A est inversible, montrons que $\forall i \in [1,n]$, $a_{ii} \neq 0$. Par l'absurde, s'il existe $i \in [1,n]$ tel que $a_{ii} = 0$, alors $\phi_A(E_i) \subset E_{i-1}$ donc $\phi_A(E_i) \neq E_i$. Réciproquement, encore par l'absurde: s'il existe $i \in [1,n]$ tel que $\phi_A(E_i) \neq E_i$, choisissons le plus petit indice i vérifiant cette propriété. Alors

$$E_{i-1} = \phi_A(E_{i-1}) \subset \phi_A(E_i) \neq E_i$$

En examinant les dimensions, on obtient que $i - 1 \leq \dim\phi_A(E_i) < i$. Par conséquent, $\dim\phi_A(E_i) = i - 1$ et $\phi_A(E_i) = E_{i-1}$. En particulier, $\phi_A(e_i) \in E_{i-1}$ et donc $a_{ii} = 0$.

e. Soit $A \in \mathcal{T} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors ϕ_A est bijective, et $\forall k \in [1,n]$, $\phi_A(E_k) = E_k$. On montre facilement que $\phi_A^{-1}(E_k) = E_k$ et donc les E_k sont stables par ϕ_A^{-1}, ce qui prouve que A^{-1} est triangulaire supérieure d'après a).

$\boxed{Q\ 2}$

a. Soit $k \in [1,n]$. Comme $a_{kk} = 0$, $\phi_A(e_k) \in E_{k-1}$ et comme $\phi_A(E_{k-1}) \subset E_{k-1}$, $\phi_A(E_k) \subset E_{k-1}$. On montre ensuite par récurrence que $\forall p \in [1,k]$, $\quad \phi_A^p(E_k) \subset E_{k-p}$. $\forall p > k$, $\quad \phi_A^p(E_k) = \{0\}$. En particulier $\phi_A^n(E) = \phi_A^n(E_n) = \{0\}$ et donc $\phi_A^n = 0$.

b. Si ϕ_A est d'indice de nilpotence n exactement, alors $\phi_A^{n-1} \neq 0$, et comme $\phi_A^{n-1}(E_{n-1}) = \{0\}$, nécessairement $\phi_A^{n-1}(e_n) \neq 0$. Mais on montre par récurrence que

$$\forall k \geq 2, \quad \phi_A^{k-1}(e_k) = a_{1,2}a_{2,3}\dots a_{k-1,k}e_1$$

En particulier $\phi_A^{n-1}(e_n) = a_{1,2}\dots a_{n-1,n}e_1$ et donc $\forall i < n$, $a_{i,i+1} \neq 0$. La réciproque provient de la même propriété.

$\boxed{Q\ 3}$ a) On calcule pour $k \in \mathbb{N}$:

$$B^k = PA^kP^{-1}$$

et comme P est inversible, il est clair que $A^k = 0 \Longleftrightarrow B^k = 0$. Donc A et B sont nilpotentes de même indice.
b) A n'est pas inversible, sinon toutes ses puissances le seraient également. Donc ϕ_A n'est pas bijective, donc n'est pas surjective. Notons $F = \operatorname{Im}\phi_A$. Si l'on suppose que $A \neq 0$, $F \neq \{0\}$ et l'on peut trouver une base $(u_1,\dots,u_r)$ de F. Complétons ce système libre en une base de E: $b' = (u_1,\dots,u_r,u_{r+1},\dots,u_n)$. Si A' est la matrice de ϕ_A dans cette base b', alors les $n - r$ dernières lignes de A' sont nulles, et donc la dernière aussi (car $r = \operatorname{rg}\phi_A < n$).
c) Par récurrence sur n:
Si $n = 1$, $A = (a)$ donc $A^p = (a^p)$ et comme A est nilpotente, $a = 0$ et donc la matrice de ϕ_A dans toute base est nulle.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: Soit b' la base construite à la question précédente, et $F = \operatorname{Vect}(u_1,\dots,u_{n-1})$. Alors F est stable par ϕ_A, et la restriction de ϕ_A à F est encore nilpotente. Donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base de F: $(v_1,\dots,v_{n-1})$ dans laquelle la matrice de $\phi_{A/F}$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle. Donc

$$\forall j \in [1,n-1], \quad \phi_A(v_j) \in \operatorname{Vect}(v_1,\dots,v_{j-1})$$

Posons $v_n = u_n$ et définissons $b'' = (v_1,\dots,v_n)$. C'est une base de E et puisque

$$\phi_A(v_n) \in F = \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_{n-1})$$

la matrice de ϕ_A dans b'' est triangulaire supérieure à diagonale nulle.
d) D'après la question précédente, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle et une telle matrice est d'indice inférieur à n. Donc l'indice de A est inférieur ou égal à n.
e) Considérons la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On sait qu'elle est nilpotente et que toute matrice semblable est également nilpotente. Si l'on considère $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible, alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

$\boxed{Q\ 4}$ a) Soient p,q les indices de nilpotence de A et B. Posons $r = p+q-1$. D'après la formule du binôme ($AB = BA$):

$$(A+B)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} A^k B^{r-k}$$

mais si $k \geq p$, $A^k = 0$, et si $k < p$, alors $r - k > r - p = q - 1$ et donc $B^{r-k} = 0$. Donc toutes les matrices de cette somme sont nulles et donc $(A+B)^k = 0$.
b) Puisque λB est nilpotente et commute avec A et que l'on a vu que les indices de nilpotence étaient inférieurs à n, d'après la question précédente, $(A + \lambda B)^n = 0$.
c) Puisque $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(A+\lambda B)^n = 0$, tous les coefficients de cette matrice sont nuls. Donc $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $P_{ij}(\lambda) = 0$. Mais il est clair que $P_{ij}(\lambda)$ est un polynôme en λ, et donc tous les coefficients de ces polynômes sont nuls. Mais puisque

$$(A+\lambda B)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} A^k B^{n-k} \right) \lambda^{n-k}$$

il vient que $\forall k \in [0,n]$, $A^k B^{n-k} = 0$.
Soient alors $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + q \geq n$. Si $q \geq n$, alors $B^q = 0$ et donc $A^p B^q = 0$. Si $q < n$, alors $A^p B^q = A^{p+q-n} A^{n-q} B^q = 0$.

$\boxed{Q\ 5}$ a) Remarquons que $\forall k \geq 1$, la matrice A^k est nilpotente car $(A^k)^n = (A^n)^k = 0$. Par conséquent, pour $n \geq 2$,

$$\exp(A) - I = A + \dots + \frac{1}{(n-1)!} A^{n-1} = A \left[I + \dots + \frac{1}{(n-1)!} A^{n-2} \right] = AB$$

où $AB = BA$. Donc $(\exp(A) - I)^n = A^n B^n = 0$.
b) Calculons

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (A+B)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{k!} A^i B^{k-i} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!} A^i B^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{i!(k-i)!} A^i B^{k-i}
\end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $j = k - i$,

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-i} \frac{1}{i!j!} A^i B^j \\
&= \sum_{i+j \leq n-1} \frac{1}{i!j!} A^i B^j \\
&= \exp(A)\exp(B)
\end{aligned}$$

c) En prenant $B = -A$, puisque B est nilpotente et commute avec A,

$$I = \exp(0) = \exp(A - A) = \exp(A)\exp(-A)$$

et donc $\exp(A)$ est inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

$\boxed{Q\ 6}$ On trouve que $AX_\omega = \alpha X_\omega$. En d'autres termes, X_ω est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $\alpha = a_1 + \omega a_2 + \cdots + \omega^{n-1} a_n$.

$\boxed{Q\ 7}$ Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $\lambda_0 X_0 + \cdots + \lambda_{n-1} X_{n-1} = 0$. En regardant toutes les lignes de ces matrices colonnes, on voit que les scalaires λ_i doivent vérifier le système d'équations homogène :

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} & = 0 \\ \lambda_0 + \omega\lambda_1 + \cdots + \omega^{n-1}\lambda_{n-1} & = 0 \\ \vdots & = \vdots \\ \lambda_0 + \omega^{n-1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{(n-1)(n-1)}\lambda_{n-1} & = 0 \end{cases}$$

La matrice de ce système est une matrice de vandermonde $V = V(1,\omega, \dots ,\omega^{n-1})$ associée à n scalaires distincts. On connaît son déterminant : $\det(V) = \prod_{0\le i<j\le n-1}(\omega^j - \omega^i) \neq 0$. Cette matrice est inversible et donc le système possède une unique solution $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

$\boxed{Q\ 8}$ Notons $u \in L(\mathbb{C}^n)$ l'endomorphisme ayant A comme matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. La matrice du même endomorphisme dans la base de vecteurs propres $(X_0, \dots ,X_{n-1})$ est diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots ,\alpha_n)$ où $\alpha_i = a_1 + \omega^i a_2 + \cdots + \omega^{i(n-1)} a_n$.

$\boxed{Q\ 9}$ Les deux matrices A et D étant semblables, elles ont même déterminant :

$$\det(A) = \alpha_0 \dots \alpha_{n-1} = \boxed{\prod_{i=0}^{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{ij} a_{j+1}\Big)}$$