MPSI 2 : DL 07

pour le 26 mars 2003

Dans le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geq 2$. On notera $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. E_{ij} désigne la matrice de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec un coefficient 1 à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne, et des zéros partout ailleurs.

$\boxed{Q\ 1}$ Soit un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $\forall x \in E$, le système $(x,u(x))$ est lié. Montrer que u est une homothétie. On utilisera les matrices.

$\boxed{Q\ 2}$ Soit $Tr : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & Tr(A) \end{array} \right.$ la forme linéaire qui à une matrice associe sa trace. Déterminer $\mathrm{Im}(Tr)$, puis calculer $\dim(\mathrm{Ker}(Tr))$.

$\boxed{Q\ 3}$ a) On considère une matrice $B = ((b_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $Tr(BE_{kl})$ en fonction des coefficients de B.
b) Soit ψ une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \psi(A) = Tr(BA)$$

$\boxed{Q\ 4}$ Soit une forme linéaire ϕ sur l'espace $L(E)$. Montrer l'existence d'une application linéaire $f \in L(E)$ telle que

$$\forall u \in L(E) \quad \phi(u) = Tr(fou)$$

Dans la suite, on note ϕ_f l'application

$$\phi_f : \left\{ \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & Tr(fou) \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 5}$ a) Montrer que

$$\forall f \in L(E), \quad (\phi_f = 0) \Rightarrow (f = 0)$$

b)En déduire que l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & (L(E))^* \\ f & \mapsto & \phi_f \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$\boxed{Q\ 6}$ Soit $f \in L(E)$. On suppose que

$$\forall (u,v) \in L(E)^2, \quad \phi_f(uov) = \phi_f(vou)$$

a) Montrer que $\forall u \in L(E), \quad uof = fou$.
b) Montrer que f est une homothétie.
c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\phi_f = \lambda Tr$$

On considère désormais un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $u \neq 0$, et vérifiant

$$Tr(u) = 0$$

$\boxed{Q\ 7}$ Montrer que u n'est pas une homothétie vectorielle.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrer qu'il existe une base b de E telle que la matrice A de u dans b soit telle que $a_{1,1} = 0$.

On peut alors montrer par récurrence sur n l'existence d'une base b de E telle que la matrice de u dans la base b soit telle que tous ses éléments diagonaux soient nuls. On admettra ce résultat.
Soit $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1; \dots; \alpha_n)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont tous distincts.
On note

$$\psi_D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & DM - MD \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 9}$ Montrer que ψ_D est une application linéaire et déterminer son noyau.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer que $\mathrm{Im}\,\psi_D$ est l'ensemble des matrices $M = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad m_{ii} = 0$$

$\boxed{Q\ 11}$ Soit $u \in L(E)$. Déduire de ce qui précède le théorème suivant :

$$(Tr(u) = 0) \Longleftrightarrow (\exists (v,w) \in L(E)^2 \quad u = vow - wou)$$

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Attention à la traduction de l'hypothèse. Elle s'écrit :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \text{ tel que } u(x) = \lambda_x.x$$

L'ordre des quantificateurs est important ! La difficulté est de montrer que λ_x est en fait un scalaire indépendant de x. Voyons deux démonstrations. La première est valable en dimension finie et utilise le calcul matriciel, alors que la deuxième est valable en dimension infinie.
Considérons une base e de l'espace E et notons A la matrice de l'endomorphisme u dans cette base. L'hypothèse donne matriciellement :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}), \exists \lambda_X \in \mathbb{R} \text{ tq } AX = \lambda_X.X$$

En particulier pour $k \in [\![1,n]\!]$, en posant $X_k = ((\delta_{ik}))_{1\le i\le n}$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $AX_k = \lambda_k X_k$. On en tire que pour $i \neq k$, $a_{ik} = 0$ et que $a_{kk} = \lambda_k$. Donc la matrice A doit être diagonale $A = \operatorname{Diag}(\lambda_1;\dots;\lambda_n)$. Mais alors en prenant pour $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, X_{kl} la matrice colonne avec un 1 aux lignes k et l et des zéros ailleurs, on montre que $\lambda_k = \lambda_l$. Par conséquent, la matrice A est scalaire et alors l'endomorphisme u est une homothétie.
Pour la deuxième démonstration, introduisons l'application

$$\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_x \end{array} \right.$$

définie à partir de l'hypothèse. Il s'agit de montrer que cette application est constante.
Soit deux vecteurs non-nuls (x,y). Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$ en étudiant les deux cas possibles :

1. Le système (x,y) est libre. Comme

$$u(x+y) = \lambda_{x+y}.(x+y) = \lambda_x.x + \lambda_y.y$$

on obtient que

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x).x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y).y = 0$$

et comme le système (x,y) est libre, il vient que

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$$

2. Le système (x,y) est lié. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha.x$ (on a supposé que $x \neq 0$). Alors

$$u(y) = \lambda_y.y = (\alpha\lambda_y).x = u(\alpha.x) = \alpha u(x) = \alpha\lambda_x.x$$

comme on a supposé que $x \neq 0$, on en tire que $\alpha(\lambda_y - \lambda_x) = 0$ et par conséquent, puisque $y \neq 0$, que $\lambda_x = \lambda_y$.

Donc, lorsque $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a montré que $\lambda_x = \lambda_y$. Définissons le scalaire λ qui vaut cette constante λ_x qui est indépendante du vecteur x non-nul. Pour le vecteur nul, on a encore $u(0) = 0 = \lambda.0$ et par conséquent, $\forall x \in E$, $u(x) = \lambda.x$. Donc $u = \lambda.\operatorname{id}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Il est clair que $\operatorname{Im}(Tr) = \mathbb{R}$. En effet, si $\lambda \in \mathbb{R}$, en posant A la matrice avec $a_{11} = \lambda$ et tous les autres coefficients nuls, on a bien $\operatorname{Tr}(A) = \lambda$.
Alors, d'après la formule du rang, on tire que $\dim(\operatorname{Ker}(Tr)) = n^2 - 1$. En d'autres termes, $\operatorname{Ker}(Tr)$ est un hyperplan de l'espace des matrices $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{Q\ 3}$ a) En décomposant la matrice B sur la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on trouve que

$$\begin{aligned} BE_{kl} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}E_{ij}E_{kl} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\delta_{jk}E_{il} \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ik}E_{il} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(BE_{kl}) &= \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\operatorname{Tr}(E_{il})\\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\delta_{il}\\ &= b_{lk}\end{aligned}$$

b) Il suffit de poser $B = ((b_{ij}))_{1\le i,j\le n}$ où le coefficient B est défini par $b_{ij} = \psi(E_{ji})$. Soit alors une matrice $A = ((a_{ij}))_{1\le i,j\le n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On calcule

$$\begin{aligned}\psi(A) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\psi(E_{ij})\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\operatorname{Tr}(BE_{ij})\\ &= \operatorname{Tr}(BA)\end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Soit $\phi \in L(E)^\star$. Définissons la forme linéaire correspondante sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons pour cela une base e de l'espace E et posons

$$\psi : \left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ A & \mapsto & \phi(u)\end{array}\right.$$

où u est l'unique endomorphisme de E tel que $A = \operatorname{Mat}_e(u)$. On montre facilement que ψ est linéaire. D'après la question précédente, il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\psi(A) = \operatorname{Tr}(BA)$. Notons v l'unique endomorphisme de E tel que $B = \operatorname{Mat}_e(v)$. Alors pour tout endomorphisme $u \in L(E)$, $\operatorname{Tr}(BA) = \operatorname{Tr}(v\circ u)$ et donc $\phi(u) = \operatorname{Tr}(v \circ u)$.

$\boxed{Q\ 5}$

- $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit un endomorphisme $f \in L(E)$ et e une base de l'espace E. Notons $B = \operatorname{Mat}_e(f)$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base e. Considérons une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $A = \operatorname{Mat}_e(u)$. Puisque $\phi_f(u) = 0$, on obtient que $\operatorname{Tr}(BA) = 0$ pour toute matrice A. En particulier, si l'on prend $A = E_{kl}$, on obtient que $b_{lk} = 0$, et donc que la matrice B est nulle. Mais alors $f = 0$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$: clair.

b) D'après a), l'application Φ est injective. D'après la formule du rang, on tire que $\operatorname{rg}\Phi = n^2$ et donc que Φ est surjective. Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$\boxed{Q\ 6}$ a) Soit $u \in L(E)$. Montrons que $\Phi(f\circ u) = \Phi(u \circ f)$. Soit $v \in L(E)$, on calcule

$$\Phi(f\circ u)(v) = \phi_{f\circ u}(v) = \operatorname{Tr}(f\circ u\circ v) = \phi_f(u\circ v) = \phi_f(v\circ u)$$

D'autre part, en utilisant la propriété de la trace, $\operatorname{Tr}(w_1\circ w_2) = \operatorname{Tr}(w_2\circ w_1)$, on calcule

$$\Phi(u\circ f)(v) = \phi_{u\circ f}(v) = \operatorname{Tr}(u\circ(f\circ v)) = \operatorname{Tr}(f\circ v)\circ u) = \phi_f(v\circ u)$$

Par conséquent, $\forall v \in L(E)$, $\Phi(f\circ u)(v) = \Phi(u\circ f)(v)$ et par conséquent, $\Phi(f\circ u) = \Phi(u\circ f)$. Puisque on a vu à la question 5 que Φ était un isomorphisme, il vient que $f\circ u = u\circ f$.
b) Comme f commute avec tous les endomorphismes, on en déduit que f est une homothétie (voir l'exercice fait en cours). Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda.\operatorname{id}$.
c) Alors pour tout endomorphisme $u \in L(E)$, $\Phi_f(u) = \lambda\operatorname{Tr}(u)$ et donc $\Phi_f = \lambda.\operatorname{Tr}$.

$\boxed{Q\ 7}$ Par l'absurde, s'il existait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda\operatorname{id}$, alors $\operatorname{Tr}(u) = n\lambda$ d'où $\lambda = 0$ et alors $u = 0$ ce qui est impossible.

$\boxed{Q\ 8}$ D'après la question 1, puisque u n'est pas une homothétie, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que le système $\big(u(x_0),x_0\big)$ soit libre. On complète ce système en une base de E de la forme $e' = (x_0,u(x_0),e_3,\dots,e_n)$ en utilisant le théorème de la base incomplète. Dans cette base la matrice de u s'écrit

$$\mathrm{Mat}_{e'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & ? & \dots \\ 1 & ? & \dots \\ 0 & ? & \dots \\ \vdots & ? & \dots \\ 0 & ? & \dots \end{pmatrix}$$

$\boxed{Q\ 9}$ On montre facilement que ψ_D est linéaire. Cherchons son noyau. Soit $M = ((m_{ij}))_{1\le i,j\le n} \in \operatorname{Ker}\psi_D$. On calcule

$$DM = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i m_{ij} E_{ij}$$

$$MD = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j m_{ij} E_{ij}$$

Comme $DM - MD = 0$, en en déduit que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (\alpha_i - \alpha_j) m_{ij} = 0$$

et donc que pour $i \neq j$, $m_{ij} = 0$. La matrice M est donc nécessairement diagonale. On vérifie réciproquement que si M est une matrice diagonale, on a bien $\psi(D)(M) = 0$ (on sait multiplier deux matrices diagonales). Donc $\operatorname{Ker}\psi_D = \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{Q\ 10}$ Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le calcul précédent,

$$\psi_D(M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_j) m_{ij} E_{ij}$$

On en déduit que $\psi_D(M)$ est une matrice de trace nulle, et donc que $\operatorname{Im}\psi_D \subset \mathcal{D}_0$ (ensemble des matrices de trace nulle). Réciproquement, si $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de trace nulle, il suffit de définir pour $i \neq j$, $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\alpha_i - \alpha_j}$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $m_{ii} = 0$, et on a bien $\psi_D(M) = A$. Par conséquent, l'image de ψ_D est l'ensemble des matrices de trace nulle.

$\boxed{Q\ 11}$

- $(ii) \Rightarrow (i)$ est clair .
- $(i) \Rightarrow (ii)$ D'après le résultat admis, il existe une base b de l'espace E telle que la matrice de u dans cette base soit une matrice A à coefficients diagonaux nuls. D'après la question 10, en posant par exemple $D = \mathrm{Diag}(1;2;\dots;n)$ il existe une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi_D(M) = A$. En appelant v l'endomorphisme de E ayant D comme matrice dans la base b et w l'endomorphisme de E ayant M comme matrice dans la base b, on a alors $u = v \circ w - w \circ v$.