MPSI 2 : DL 6

pour le 20 février 2003

1 Irrationalité de π

Nous allons montrer par l'absurde que le nombre π est irrationnel. Supposons donc qu'il existe deux entiers non-nuls $(p,q) \in \mathbb{N}^{\star 2}$ tels que $\pi = \frac{p}{q}$. On définit pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le polynôme

$$P_n = \frac{1}{n!} X^n (p - qX)^n$$

$\boxed{Q\ 1}$ Déterminer explicitement les coefficients a_k du polynôme P_n. En déduire que pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$

$\boxed{Q\ 2}$ Montrer en utilisant la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$

On définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{p}{q}} P_n(t) \sin t \, \mathrm{d}t$$

$\boxed{Q\ 3}$ Montrer que la suite (I_n) converge vers 0 et que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $I_n > 0$.

$\boxed{Q\ 4}$ Montrer que $I_n \in \mathbb{N}^\star$.

$\boxed{Q\ 5}$ Conclure.

2 Limite d'intégrales

2.1 Partie I

On considère une fonction continue $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(1) \neq 0$. On note pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) \, \mathrm{d}t$$

.

$\boxed{Q\ 6}$ On suppose dans cette question uniquement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$. Trouver un équivalent de la suite (I_n) en utilisant une intégration par parties.

On suppose désormais que la fonction f est uniquement continue sur le segment $[0,1]$ avec toujours $f(1) \neq 0$. On se propose de retrouver le résultat précédent.

On considère une fonction $\varepsilon : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $\varepsilon(1) = 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$J_n = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} t^n f(t)\ \mathrm{d}t$$
$$K_n = \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n f(t)\ \mathrm{d}t$$
$$\theta_n = n \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n \varepsilon(t)\ \mathrm{d}t$$

$\boxed{Q\ 7}$

a. Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b. Montrer que $nJ_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c. Monter que $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

d. Montrer qu'il existe un réel K que l'on précisera tel que $nK_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} K$.

e. En déduire un équivalent de la suite (I_n) lorsque $n \to +\infty$.

$\boxed{Q\ 8}$ Si l'on suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $f(1) = 0$, $f'(1) \neq 0$, en effectuant une intégration par parties, déterminer un équivalent de la suite (I_n) lorsque $n \to +\infty$.

2.2 Partie II

On considère dans cette partie, une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Pour tout réel $x \in [0,1[$, on note

$$I_n(x) = \int_0^x t^n f(t)\ \mathrm{d}t \text{ et } S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} I_k(x)$$

$\boxed{Q\ 9}$ Montrer que pour tout réel $x \in [0,1[$, $I_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer qu'il existe une fonction $F : [0,1[\mapsto \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1[$,

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$$

On exprimera $F(x)$ sous la forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction f.

$\boxed{Q\ 11}$ On suppose dans cette question que $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Calculer pour tout $x \in [0,1[$, $F(x)$ et déterminer la limite de la fonction F lorsque $x \to 1^-$.

$\boxed{Q\ 12}$ On suppose dans cette question que $f(t) = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$. Déterminer la fonction F et sa limite lorsque $x \to 1^-$.

2.3 Partie III

On suppose dans cette partie que $\forall t \in [0,1],\ f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Pour tout entier $p > 0$, on note :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

$\boxed{Q\ 13}$ Calculer I_0 et I_1.

$\boxed{Q\ 14}$ Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$ une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

$\boxed{Q\ 15}$ Montrer que la suite (U_n) converge et déterminer sa limite U. Déterminer ensuite un équivalent de la suite $(U_n - U)$.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Utilisons la formule du binôme :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \frac{p^{n-i}q^i}{n!} X^{n+i}$$

On en déduit l'expression du coefficient de X^k du polynôme P_n : $P_n = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ avec :

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin [\![n,2n]\!] \\ \dfrac{(-1)^{k-n}}{n!} \dbinom{n}{k-n} p^{2n-k} q^{k-n} & \text{si } k \in [\![n,2n]\!] \end{cases}$$

D'après la formule de Taylor, $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$. On en tire que $P_n^{(k)}(0) = 0$ si $k \notin [\![n,2n]\!]$ et si $n \leq k \leq 2n$,

$$P_n^{(k)}(0) = k! a_k = (-1)^{k-n} \frac{k!}{n!} \binom{n}{k-n} p^{2n-k} q_{k-n}$$

Puisque $n \leq k$, $k!/n! \in \mathbb{N}$, et donc $P_n^{(k)} \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Remarquons que

$$P_n(p/q - X) = \frac{1}{n!}(p/q - X)^n \big(p - q(p/q - X)\big)^n = \frac{1}{n!}(p - qX)^n X^n = P_n(X)$$

Par conséquent, en dérivant k fois, on trouve que

$$(-1)^k P_n^{(k)}(p/q - X) = P_n^{(k)}(X)$$

En prenant $x = 0$, on obtient donc $P_n^{(k)}(p/q) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ d'après la question précédente.

$\boxed{Q\ 3}$ Pour $t \in [0,p/q] = [0,\pi]$, on a l'encadrement $0 \leq p - qt \leq p$. En majorant l'intégrale en valeur absolue, on obtient

$$|I_n| \leq \frac{1}{n!} \int_0^{\frac{p}{q}} t^n p^n \, \mathrm{d}t = \frac{p^{2n+1}}{n! q^n} \leq \frac{p^{2n+1}}{n!}$$

Mais pour toute suite géométrique (k^n), on sait que $k^n = o(n!)$, et donc $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme $\forall t \in [0,p/q]$, $P_n(t)\sin t \geq 0$, si l'on avait pour $n \in \mathbb{N}^\star$ $I_n = 0$, puisque la fonction $t \mapsto P_n(t)\sin t$ est continue, positive sur $[0,p/q]$ $(p/q = \pi)$ et d'intégrale nulle, d'après un théorème, cette fonction serait nulle sur $[0,p/q]$ ce qui est faux. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $I_n > 0$.

$\boxed{Q\ 4}$ En intégrant plusieurs fois par parties, on trouve que

$$I_n = \Big[-\cos t P_n(t) + \sin t P_n'(t) + \cos t P_n''(t) - \sin t P_n^{(3)}(t) \cos t P_n^{(4)}(t) + \cdots + (-1)^{n-1} \cos t P^{(2n)}(t)\Big]_0^{\pi} + (-1)^n \int_0^{\pi} P_n^{(2n+1)}(t) \cos t \, \mathrm{d}t$$

Mais puisque $\deg P_n = 2n$, l'intégrale est nulle, et donc

$$I_n = \Big[-\cos t P_n(t) + \cos t P_n''(t) - \cdots + (-1)^{n-1} \cos(t) P^{(2n)}(t)\Big]_0^{\pi}$$

Or on a vu aux question 1 et 2 que $\forall k \in [\![0,2n]\!]$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(k)}(\pi) = P_n^{(k)}(p/q) \in \mathbb{Z}$. Donc $I_n \in \mathbb{Z}$. D'après la question 3, $I_n > 0$ et donc $I_n \in \mathbb{N}^\star$.

$\boxed{Q\ 5}$ Puisque $\forall n \geq 1$, $I_n \in \mathbb{N}^\star$, $I_n \geq 1$ or d'après la question 3, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, une absurdité. Donc π est irrationnel.

$\boxed{Q\ 6}$ Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. Puisque $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$, nous pouvons intégrer par parties I_n :

$$\begin{cases} u(x) = f(t) & u'(x) = f'(t) \\ v'(x) = t^n & v(x) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

$$I_n = \Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}f(t)\Big]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\Big[f(1) - \int_0^1 t^{n+1}f'(t)\ \mathrm{d}t\Big]$$

Comme la fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée. Notons $M_1 = \sup_{t\in[0,1]}|f'(t)|$. Alors

$$\Big|\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\ \mathrm{d}t\Big| \le \int_0^1 t^{n+1}|f'(t)|\ \mathrm{d}t \le M_1\int_0^1 t^{n+1}\ \mathrm{d}t = \frac{M_1}{n+2}$$

On en déduit donc que $nI_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$, c'est à dire (puisque $f'(1)\neq 0$) que

$$\boxed{I_n \sim \frac{f(1)}{n}}$$

$\boxed{Q\ 7}$

a. Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc est bornée. Notons $M_0 = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$. On majore alors $|I_n|$:

$$|I_n| \le \int_0^1 t^n|f(t)|\ \mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n M_0\ \mathrm{d}t = \frac{M_0}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème de majoration, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}$. Majorons comme précédemment :

$$|nJ_n| \le n\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} t^n M_0\ \mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}M_0(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^{n+1} \le M_0 e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})}$$

Mais puisque $(n+1)\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim -\sqrt{n}$, $e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et d'après le théorème de majoration, il vient que $nJ_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$|\theta_n| \le \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n|\varepsilon(t)|\ \mathrm{d}t$$

Mais puisque la fonction ε est continue sur le segment $[1-\frac{1}{\sqrt{n}},1]$, elle est bornée. Comme $\forall t\in[1-\frac{1}{\sqrt{n}}]$, $t^n|\varepsilon(t)| \le t^n\sup_{t\in[1-\frac{1}{\sqrt{n}}]}|\varepsilon(t)|$, on trouve que

$$|\theta_n| \le \frac{n}{n+1}\Big[t^{n+1}\Big]_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \sup_{t\in[1-\frac{1}{\sqrt{n}}]}|\varepsilon(t)| \le \sup_{t\in[1-\frac{1}{\sqrt{n}},1]}|\varepsilon(t)|$$

Soit alors $\varepsilon>0$. Comme $\varepsilon(1)=0$ et que la fonction ε est continue au point 1, il existe $\alpha>0$ tel que $\forall t\in[1-\alpha,1]$, $|\varepsilon(t)|\le\varepsilon$. Comme la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\ge N$, $\frac{1}{\sqrt{n}}\le\alpha$. À partir de ce rang N, on a donc $\sup_{t\in[1-\frac{1}{\sqrt{n}}]}|\varepsilon(t)|\le\varepsilon$ et donc $|\theta_n|\le\varepsilon$. Par conséquent, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

d. Écrivons pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} nK_n &= n\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n\big[f(t)-f(1)\big]\ \mathrm{d}t + nf(1)\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n\ \mathrm{d}t \\ &= \theta_n + \frac{n}{n+1}f(1)\Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big]_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \\ &= \theta_n + \frac{n}{n+1}\Big(1-e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})}\Big) \end{aligned}$$

où l'on a défini la fonction ε par $\varepsilon(t) = f(t)-f(1)$, qui est bien continue sur $[0,1]$ avec $\varepsilon(1)=0$. Puisqu'on a vu que $e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, que $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $\dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on en déduit que $nK_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$.

e. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$nI_n = nJ_n + K_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$$

et que $f(1) \neq 0$, on trouve que

$$\boxed{I_n \sim \frac{f(1)}{n}}$$

$\boxed{Q\ 8}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Intégrons par parties en posant

$$\begin{cases} u(x) = f(t) & u'(x) = f'(t) \\ v'(x) = t^n & v(x) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

$$I_n = \Big[f(t)\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n g(t)\ \mathrm{d}t$$

où l'on a défini la fonction g par $g(t) = tf'(t)$. Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, la fonction g est continue sur $[0,1]$ avec $g(1) = f'(1) \neq 0$. D'après la question 7, on sait que $\int_0^1 t^n g(t)\ \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{g(1)}{n}$ et par conséquent :

$$\boxed{I_n \sim -\frac{f'(1)}{n^2}}$$

$\boxed{Q\ 9}$ Soit $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Majorons en valeur absolue

$$|I_n(x)| \leq \int_0^x t^n |f(t)|\ \mathrm{d}t \leq M_0 \int_0^x t^n\ \mathrm{d}t = M_0 \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

et comme $0 \leq x < 1$, la suite géométrique x^n converge vers 0. Donc par le théorème de majoration, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{Q\ 10}$ Soit $x \in [0,1[$. On calcule

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \int_0^x t^k f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^n t^k\Big) f(t)\ \mathrm{d}t$$

Mais $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq t \leq x < 1$ et donc

$$\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

Par conséquent,

$$S_n(x) = \int_0^x \frac{1-t^{n+1}}{1-t} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\ \mathrm{d}t - \int_0^x t^n \frac{tf(t)}{1-t}\ \mathrm{d}t$$

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{tf(t)}{1-t}$ est continue sur le segment $[0,x]$, en introduisant $M = \sup_{t\in[0,x]} \big|\dfrac{tf(t)}{1-t}\big|$, on majore

$$\Big|\int_0^x t^n \frac{tf(t)}{1-t}\ \mathrm{d}t\Big| \leq \frac{M}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui montre que

$$\boxed{S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\ \mathrm{d}t}$$

$\boxed{Q\ 11}$ Soit $x \in [0,1[$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1+t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$$

Donc

$$F(x) = \Big[\arctan t + \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big]_0^x = \boxed{\arctan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)}$$

et $\boxed{F(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}}$

$\boxed{Q\ 12}$ Soit $x \in [0,1[$.

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{1}{1-t}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \Big[\arcsin t\Big]_0^x$$

Donc $\boxed{F(x) = \arcsin x}$ et $\boxed{F(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{\pi}{2}}$.

$\boxed{Q\ 13}$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}$$

$\boxed{Q\ 14}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, écrivons

$$I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n(t^2+1-1)}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\ \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$$

On a donc la relation

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n}$$

$\boxed{Q\ 15}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$$\frac{1}{2k-1} = I_{2k} + I_{2(k-1)}$$

on calcule

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\big[I_{2k} + I_{2(k-1)}\big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{2k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{2(k-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{2k} + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{p} I_{2p} \quad (p = k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-1} I_{2k} \\
&= I_0 + (-1)^{n-1} I_{2n} \\
&= \boxed{\frac{\pi}{4} + (-1)^{n-1} I_{2n}}
\end{aligned}$$

Mais on a vu à la question 14 que $I_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par conséquent, $\boxed{U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}}$. D'autre part, comme $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^{n-1} I_{2n}$$

et puisque la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ est continue sur le segment $[0,1]$ avec $f(1) = 1/2 \neq 0$, d'après la première partie, $I_n \sim \dfrac{f(1)}{n}$ et donc

$$\boxed{U_n - \frac{\pi}{4} \sim \frac{(-1)^{n-1}}{4n}}$$