

# MPSI 2 : DL 5

Pour le 30 janvier 2003

## 1 Nombres de Bernoulli

On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -e.v. des polynômes à coefficients réels, et pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  le  $\mathbb{R}$ -e.v. des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . On notera indifféremment  $P$  pour désigner le polynôme ou la fonction polynômiale associée.

**Q 1** On considère un polynôme  $A \in E$  de degré  $p \geq 0$ , et de coefficient dominant  $a_p$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $B \in E$  vérifiant :

1.  $B' = A$ ;
2.  $\int_0^1 B(t) dt = 0$ .

On précisera le degré et le coefficient dominant de  $B$  en fonction de  $p$  et de  $a_p$ .

On peut donc définir par récurrence la suite de polynômes  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

1.  $B_0 = 1$ ;
2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B'_n = nB_{n-1}$ ;
3.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^1 B_n(t) dt = 0$ .

**Q 2** Déterminer pour  $n \in \mathbb{N}$ , le degré et le coefficient dominant du polynôme  $B_n$ .

Les polynômes  $B_n$  s'appellent les *polynômes de Bernoulli*. On définit ensuite les *nombre de Bernoulli* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = B_n(0)$$

**Q 3** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k \quad (1)$$

**Q 4** Expliciter les polynômes  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$ , ainsi que les nombres  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ .

**Q 5** Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X) \quad (2)$$

On pourra calculer la dérivée du polynôme  $Q = (-1)^{n+1} B_{n+1}(1 - X)$  et calculer  $\int_0^1 Q(t) dt$ .

**Q 6** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$B_n(X) = 2^{n-1} \left[ B_n(X/2) + B_n((X+1)/2) \right] \quad (3)$$

**Q 7** Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_{2p+1} = 0$  et que  $\forall p \geq 2$ ,  $B_p(1) = B_p(0) = b_p$ .

**Q 8** Montrer successivement que  $\forall p \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} b_{2p+2} &= \sum_{i=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{i} b_i \\ b_{2p} &= -\frac{1}{(p+1)(2p+1)} \sum_{i=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{i} b_i \end{aligned} \quad (4)$$

**Q 9** Calculer  $b_4$  en utilisant la formule 4.

**Q 10** Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

## 2 Calcul de $\zeta(2)$

**Q 11** Soit un réel  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $a \notin \pi\mathbb{Z}$ , et un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . Exprimer  $\frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1}a}$  sous la forme d'un polynôme en  $\cotan a$ .

**Q 12** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , trouver à l'aide de la question précédente les racines réelles du polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$$

**Q 13** Calculer la somme des racines du polynôme  $P(X)$ .

**Q 14** Soit  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . On rappelle que  $\sin \theta < \theta < \tan \theta$ . En déduire que  $\cotan^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cotan^2 \theta$ .

On définit la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

**Q 15** En utilisant l'inégalité précédente avec les racines de  $P$ , montrer que la suite  $(S_n)$  converge vers  $\frac{\pi^2}{6}$ .

## Corrigé.

Q 1

1. Unicité : considérons deux polynômes  $B_1$  et  $B_2$  vérifiant ces deux relations. Puisque  $B_1' = B_2'$ , il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, B_1(x) = B_2(x) + C$ . En intégrant entre 0 et 1, on trouve que  $C = 0$  et donc que  $B_1 = B_2$ .
2. Existence : si  $A$  est le polynôme nul, il suffit de poser  $B = 0$ . Si le polynôme  $A$  n'est pas nul, il s'écrit  $A = a_p X^p + \dots + a_0 = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ . Posons alors  $B = \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} + C$  où  $C$  est une constante. Le polynôme  $B$  vérifie  $B' = A$ . Pour qu'en plus, on ait  $\int_0^1 B(t) dt = 0$ , il suffit de choisir  $C = -\sum_{k=0}^p \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$ . On trouve donc que le polynôme  $B$  est de degré  $p+1$ , et que son coefficient dominant vaut  $\frac{a_p}{p+1}$ .

Q 2 On démontre par récurrence sur  $n$  que le degré du polynôme  $B_n$  vaut  $n$  et qu'il est unitaire, en utilisant la question 1.

Q 3 Par récurrence sur  $n$ .

$$\mathcal{P}(n) : B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

$$\mathcal{P}(0) : B_0 = \binom{0}{0} b_0 = b_0 = B_0(0) = 1.$$

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  : d'après  $\mathcal{P}(n)$ ,

$$B_{n+1}' = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

En primitivant,

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{b_{n-k}}{k+1} X^{k+1} + C \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} \frac{n+1}{p} \binom{n}{p-1} b_{n+1-p} X^p + C \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n+1}{p} X^p + C \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement d'indice  $p = k+1$  et utilisé la relation  $\binom{n+1}{p} = \frac{n+1}{p} \binom{n}{p-1}$  pour  $1 \leq p \leq n+1$ . Comme  $B_n(0) = C = b_{n+1}$ , on peut intégrer la constante à la somme et l'on obtient l'expression de  $B_{n+1}$  :

$$B_{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} b_{n+1-p} X^p$$

Q 4

- Puisque  $B_1' = 1$ ,  $B_1 = X + b_1$  et comme  $\int_0^1 B_1(t) dt = 0$ , on trouve que  $b_1 = -1/2$ , puis que  $B_1 = X - 1/2$ .
- Puisque  $B_2' = 2B_1$ ,  $B_2 = X^2 - X + b_2$  et puisque  $\int_0^1 B_2(t) dt = 0$ , on trouve que  $b_2 = 1/6$  et  $B_2 = X^2 - X + 1/6$ .
- Puisque  $B_3' = 3B_2$ ,  $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + b_3$  et la condition  $\int_0^1 B_3(t) dt = 0$  donne  $b_3 = 0$  et  $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ .

Q 5 Montrons ce résultat par récurrence sur  $n$ .

$$\mathcal{P}(n) : B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$$

$\mathcal{P}(0)$  est vérifiée clairement.

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  : Posons  $Q = (-1)^{n+1}B_{n+1}(1-X)$ . Alors

$$Q'(X) = -(-1)^{n+1}B'_{n+1}(1-X) = (n+1)(-1)^n B_n(1-X) = (n+1)B_n(X) = B_{n+1}(X)$$

Par conséquent, il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $Q = B_n + C$ . Mais par le changement de variables  $u = 1-t$ ,

$$\int_0^1 Q(t) dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(1-t) dt = -(-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(u) du = 0$$

d'où  $C = 0$ , et donc  $Q = B_{n+1}$ .

**Q 6** Par récurrence :

$$\mathcal{P}(n) : B_n = 2^{n-1} [B_n(X/2) + B_n((X+1)/2)]$$

$\mathcal{P}(0)$  est vérifiée.

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  : posons  $Q = 2^n [B_{n+1}(X/2) + B_{n+1}((X+1)/2)]$ . Calculons

$$\begin{aligned} Q' &= 2^n \left[ \frac{1}{2} B'_{n+1}(X/2) + \frac{1}{2} B'_n((X+1)/2) \right] \\ &= (n+1)2^{n-1} [B_n(X/2) + B_n((X+1)/2)] \\ &= (n+1)B_n(X) \\ &= B'_{n+1} \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $Q = B_{n+1} + C$ . Mais en effectuant les changement de variables  $u = t/2$  et  $v = (t+1)/2$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(t) dt &= 2^n \left[ \int_0^1 B_{n+1}(t/2) dt + \int_0^1 B_{n+1}((t+1)/2) dt \right] \\ &= 2^{n-1} \left[ \int_0^{1/2} B_{n+1}(u) du + \int_{1/2}^1 B_{n+1}(v) dv \right] \\ &= 2^{n-1} \int_0^1 B_{n+1}(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $C = 0$  et donc  $Q = B_{n+1}$ .

**Q 7** Soit  $p \geq 1$ . D'après la relation 3, avec  $n = 2p+1$  et en faisant  $x = 0$ , on trouve que

$$B_{2p+1}(0) = 2^{2p} [B_{2p+1}(0) + B_{2p+1}(1/2)]$$

D'après la relation 2, en faisant  $x = 1/2$ , on trouve que

$$B_{2p+1}(1/2) = -B_{2p+1}(1/2)$$

donc  $B_{2p+1}(1/2) = 0$  et donc  $B_{2p+1}(0) = b_{2p+1} = 0$ . En utilisant la relation 2, avec  $p = 2k$ , on obtient immédiatement que  $b_{2k} = B_{2k}(0) = B_{2k}(1)$ , et lorsque  $p = 2k+1$ , on trouve d'après la relation 2 que  $B_{2k+1}(1) = -B_{2k+1}(0) = b_{2k+1} = 0$ . Dans tous les cas,  $B_p(1) = B_p(0)$ .

**Q 8** D'après la question précédente,  $B_{2p+2}(1) = (-1)^{2p+2} B_{2p+2}(0) = b_{2p+2}$ .

En utilisant ensuite la relation 1 avec  $x = 1$ , et la symétrie des coefficients binômiaux :

$$\begin{aligned} B_{2p+2}(1) &= \sum_{k=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{k} b_{2p+2-k} \\ &= \sum_{i=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{i} b_i \quad (i = 2p+2-k) \end{aligned}$$

En sortant de la somme les termes correspondant aux indices  $i = 2p - 1, 2p, 2p + 1, 2p + 2$ , on trouve que

$$\begin{aligned} b_{2p+2} &= \sum_{i=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{i} b_i + \binom{2p+2}{2p-1} b_{2p-1} + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + \binom{2p+2}{2p+1} b_{2p+1} + \binom{2p+2}{2p+2} b_{2p+2} \\ &= \sum_{i=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{i} b_i + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + b_{2p+2} \end{aligned}$$

En effet, les nombres  $b_{2p-1}$  et  $b_{2p+1}$  sont nuls d'après la question précédente. Les nombres  $b_{2p+2}$  s'éliminent et puisque  $\binom{2p+2}{2p} = \binom{2p+2}{2} = (p+1)(2p+1)$ , on en tire le résultat de l'énoncé.

**Q 9** De la formule précédente, on tire  $b_4 = -\frac{1}{30}$ .

**Q 10** Par récurrence sur  $n$  :

$$\mathcal{P}(n) : B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

$\mathcal{P}(1)$  : Puisque  $B_1(X) = X - 1/2$ ,  $B_1(X+1) - B_1(X) = 1$ .

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  : D'après  $\mathcal{P}(n)$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Intégrons la relation précédente entre 0 et  $x$  :

$$\begin{aligned} \int_0^x B_n(t+1) dt - \int_0^x B_n(t) dt &= n \int_0^x t^{n-1} dt \\ \int_1^{x+1} B_n(u) du - \int_0^x B_n(u) du &= x^n \quad (u = t+1) \\ \int_x^{x+1} B_n(t) dt &= x^n \quad (\text{Chasles}) \\ \left[ \frac{1}{n+1} B_{n+1}(t) \right]_x^{x+1} &= x^n \quad (B'_{n+1} = (n+1)B_n) \\ B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) &= (n+1)x^n \end{aligned}$$

et puisque cette relation est vraie pour tout réel  $x$ , on en déduit l'égalité entre polynômes.

**Q 11** Écrivons :

$$\begin{aligned} \sin[(2n+1)a] &= \frac{e^{i(2n+1)a} - e^{-i(2n+1)a}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} [(\cos a + i \sin a)^{2n+1} - (\cos a - i \sin a)^{2n+1}] \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k (1 - (-1)^k) \sin^k a \cos^{2n+1-k} a \right] \\ &= \frac{1}{i} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \sin^k a \cos^{2n+1-k} a \\ &= \frac{1}{i} \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} \sin^{2p+1} a \cos^{2(n-p)} a \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1} a \cos^{2(n-p)} a \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1}a} &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \frac{\cos^{2(n-k)}a}{\sin^{2(n-k)}a} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \cotan^{2(n-k)}a \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$Q(X) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2(n-k)}$$

et on a bien  $\frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1}a} = Q(\cotan(a))$ .

**Q 12** Si  $a \notin \pi\mathbb{Z}$ ,

$$\frac{\sin(2n+1)a}{\sin^{2n+1}a} = 0 \iff (2n+1)a = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \iff a = \frac{k\pi}{2n+1}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Si l'on pose

$$\alpha_k = \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}, \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

D'après la question 11,  $P(\alpha_k) = 0$ . On a donc trouvé  $n$  racines distinctes du polynôme  $P$  qui est de degré  $n$ . Par conséquent, les racines de  $P$  sont les réels  $\alpha_k$ , pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Ce polynôme est scindé à racines simples.

**Q 13** En utilisant les relations coefficients-racines d'un polynôme,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

où  $a_n = \binom{2n+1}{1} = 2n+1$  et  $a_{n-1} = -\binom{2n+1}{3}$ . Par conséquent,

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

**Q 14** Il suffit de remarquer que  $1 + \cotan^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} > \frac{1}{\theta^2}$ .

**Q 15** Avec  $\theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ , ( $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ), On trouve que

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k < \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} < n + \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

d'où l'on tire

$$\pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2 n}{(n+1)^2} + \pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$$

Comme les deux suites encadrantes convergent vers  $\frac{\pi^2}{6}$ , d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite  $(S_n)$  converge vers  $\frac{\pi^2}{6}$ .