MPSI 2 : DL 4

pour le 08 janvier 2003

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On appelle projecteur un endomorphisme p de E qui vérifie $p \circ p = p$.

1 Première partie.

Soit un projecteur p de l'espace vectoriel E.

$\boxed{Q\ 1}$ Montrer que $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.

$\boxed{Q\ 2}$ Que peut-on dire de la restriction de p à $\operatorname{Im} p$?

$\boxed{Q\ 3}$ Montrer que pour tout sous-espace vectoriel A de E on a $p^{-1}(A) = (A \cap \operatorname{Im} p) \oplus \ker p$.

$\boxed{Q\ 4}$ Soit un sous-espace vectoriel F de l'espace E. Montrer l'équivalence :

$$\underset{(i)}{\big(F \text{ stable par } p\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(F = (F \cap \ker p) + (F \cap \operatorname{Im} p)\big)}$$

2 Deuxième partie.

$\boxed{Q\ 5}$ Soit p un endomorphisme de E. Montrer que p est un projecteur de E si et seulement si il existe deux s.e.v. A et B de E tels que :

- $E = A \oplus B$
- $\forall x \in A,\ p(x) = 0$
- $\forall x \in B,\ p(x) = x$.

On dit alors que p est la projection sur B parallèlement à A.

$\boxed{Q\ 6}$ Soit f un endomorphisme de E. On désigne par id l'application identité de E. Montrer que l'endomorphisme $(\mathrm{id} - f)$ est un projecteur si et seulement si l'endomorphisme f est un projecteur. Comparer alors le noyau et l'image de $(\mathrm{id} - f)$ à ceux de f.

$\boxed{Q\ 7}$ Soient deux sous-espaces vectoriels A et B supplémentaires de l'espace E. Soient deux endomorphismes u et v de E. Montrer que

$$\underset{(i)}{\big(u = v\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(\forall x \in A,\ u(x) = v(x) \text{ et } \forall x \in B,\ u(x) = v(x)\big)}$$

On considère maintenant deux endomorphismes f et g de l'espace E.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrer que f et g sont deux projecteurs de même image si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.

$\boxed{Q\ 9}$ Donner une condition nécessaire et suffisante du même type pour que f et g soient deux projecteurs de même noyau.

3 Troisième partie.

Soient f et g deux projecteurs de E.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer que si les deux projecteurs commutent ($f \circ g = g \circ f$), on a :

$$E = (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) + (\operatorname{Im} f \cap \ker g) + (\ker f \cap \operatorname{Im} g) + (\ker f \cap \ker g)$$

On pourra pour cela utiliser la question 4. Que peut-on dire alors de l'endomorphisme $f \circ g$?

$\boxed{Q\ 11}$ Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(i) $f + g$ est aussi un projecteur de E ;
(ii) $f \circ g + g \circ f = 0$;
(iii) $f \circ g = g \circ f = 0$.

Si l'une des propositions ci-dessus est vérifiée, montrer que

$$\ker(f + g) = \ker f \cap \ker g \text{ et } \operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$$

4 Quatrième partie.

$\boxed{Q\ 12}$ Montrer que si f est un endomorphisme quelconque de E et g un projecteur de E, on a :

$$\ker f \circ g = \ker g \oplus (\ker f \cap \operatorname{Im} g)$$

$\boxed{Q\ 13}$ Montrer que si f est un projecteur de E et g un endomorphisme quelconque de E, on a :

$$\operatorname{Im} f \circ g = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} g + \ker f)$$

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Question de cours.

$\boxed{Q\ 2}$ $p_{|\operatorname{Im} p} = \mathrm{id}_{\operatorname{Im} p}$: voir le cours.

$\boxed{Q\ 3}$

- Montrons que la somme $(A \cap \operatorname{Im} p) + \ker p$ est directe, c'est à dire que $(A \cap \operatorname{Im} p) \cap \ker p = \{0_E\}$. On a $(A \cap \operatorname{Im} p) \cap \ker p = A \cap (\operatorname{Im} p \cap \ker p)$ et puisque la somme $\ker p + \operatorname{Im} p$ est directe, $\operatorname{Im} p \cap \ker p = \{0_E\}$, donc $(A \cap \operatorname{Im} p) \cap \ker p = \{0_E\}$.
- $\supset$: soit $x \in (A \cap \operatorname{Im} p) + \ker p$. Il existe $(x_1, x_2) \in (A \cap \operatorname{Im} p) \times \ker p$ tels que $x = x_1 + x_2$. Puisque $x_2 \in \ker p$, $p(x_2) = 0$ et puisque $x_1 \in \operatorname{Im} p$, d'après la question 2, on a $p(x_1) = x_1$. Alors, puisque $x_1 \in A$,
$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1) = x_1 \in A$$
et d'après la définition de l'image réciproque, on a bien $x \in p^{-1}(A)$.
- $\subset$: soit $x \in p^{-1}(A)$. Puisque d'après la question 1, $E = \operatorname{Im} p + \ker p$, il existe $(x_1, x_2) \in \operatorname{Im} p \times \ker p$ tels que $x = x_1 + x_2$. Comme $x_1 \in \operatorname{Im} p$, d'après la question 2, $p(x_1) = x_1$. Donc $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1) = x_1$. Or puisque $x \in p^{-1}(A)$, d'après la définition de l'image réciproque, $p(x) \in A$. Par conséquent, $x_1 \in A$. Donc $x_1 \in A \cap \operatorname{Im} p$, et $x_2 \in \ker p$ et $x = x_1 + x_2$. Donc $x \in (A \cap \operatorname{Im} p) + \ker p$.

$\boxed{Q\ 4}$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit $x \in F$. D'après (ii), il existe $(x_A, x_B) \in A \times B$ tels que $x = x_A + x_B$. Alors $p(x) = p(x_A) + p(x_B) = p(x_B) = x_B \in F$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Posons $A = F \cap \ker p$ et $B = F \cap \operatorname{Im} p$. Ce sont des sev de $\ker p$ et de $\operatorname{Im} p$. Montrons que $F \subset A + B$. Soit $x \in F$. D'après la question 1, il existe $(x_1, x_2) \in \ker p \times \operatorname{Im} p$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $p(x) = x_2 \in F$ puisque F est stable par p. Donc $x_2 \in F \cap \operatorname{Im} p = B$. Ensuite $x_1 = x - x_2$ et puisque $x \in F$, $x_2 \in F$, et que F est stable par combinaisons linéaires, on a bien $x_1 \in F$ et donc $x_1 \in \ker p \cap F = A$. L'autre inclusion est claire puisque $A \subset F$ et $B \subset F$.

$\boxed{Q\ 5}$ C'est une question de cours, avec $A = \ker p$ et $B = \operatorname{Im} p$.

$\boxed{Q\ 6}$ Si f est un projecteur, en calculant
$$(\mathrm{id}_E - f)^2 = \mathrm{id}_E - 2f + f^2 = \mathrm{id}_E - f$$
on voit que $(\mathrm{id}_E - f)$ est également un projecteur. Réciproquement, si $(\mathrm{id}_E - f)$ est un projecteur, $(\mathrm{id}_E - f)^2 = (\mathrm{id}_E - f)$ et donc $\mathrm{id}_E - 2f + f^2 = \mathrm{id}_E - f$ ce qui donne $f^2 = f$ et donc f est un projecteur.
Supposons que f est un projecteur. D'après la question 2, $\operatorname{Im} f = \{x \in E \mid f(x) = x\} = \ker(\mathrm{id}_E - f)$ et de même, $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - f) = \{x \in E \mid (\mathrm{id}_E - f)(x) = x\} = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\} = \ker f$.

$\boxed{Q\ 7}$

$(i) \Rightarrow (ii)$ est clair.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit $x \in E$. Comme $E = A \oplus B$, $\exists (x_A, x_B) \in A \times B$ tels que $x = x_A + x_B$. Alors $u(x) = u(x_A) + u(x_B) = v(x_A) + v(x_B) = v(x)$.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrons que
$$\underbrace{\big(f,\ g \text{ projecteurs et } \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\left(\begin{cases} f \circ g = g \\ g \circ f = f \end{cases}\right)}_{(ii)}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $x \in E$. On a $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = g(x)$ car $g(x) \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ et $f_{|\operatorname{Im} f} = \mathrm{id}_{\operatorname{Im} f}$ d'après la question 2. Donc $f \circ g = g$. On montre de même que $g \circ f = f$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Montrons que f et g sont des projecteurs. Calculons pour cela en utilisant (ii) :
$$f^2 = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ g \circ f = g \circ f = f$$
On montre de même que $g^2 = g$. Par conséquent, f et g sont deux projecteurs.
Montrons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. Soit $x \in \operatorname{Im} f$, $f(x) = x$ d'après la question 2. Alors $g(x) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x) = f(x) = x$, ce qui montre que $x \in \operatorname{Im} g$. On démontre de la même façon que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$.

$\boxed{Q\ 9}$ Montrons que

$$\Big(\underbrace{\begin{cases} f^2 = f \\ g^2 = g \\ \ker f = \ker g \end{cases}}_{(i)}\Big) \iff \Big(\underbrace{\begin{cases} f\circ g = f \\ g \circ f = g \end{cases}}_{(ii)}\Big)$$

$(i) \Rightarrow (i)$ Soit $x \in E$. Comme g est un projecteur, d'après la question 1, il existe $(x_1,x_2) \in \ker g \times \operatorname{Im} g$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $g(x) = g(x_2) = x_2$ d'après la question 2. Mais alors

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x_2)$$

Mais $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2)$ puisque $x_1 \in \ker g = \ker f$. Donc $f \circ g(x) = f(x)$ et donc $f \circ g = f$. On montre de la même façon que $g \circ f = g$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ On montre que $f^2 = f$ comme à la question précédente. Montrons que $\ker f \subset \ker g$. Soit $x \in \ker f$. Calculons $g(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(0_E) = 0_E$. Donc $x \in \ker g$. De la même façon, on montre que $\ker g \subset \ker f$.

$\boxed{Q\ 10}$

- Montrons que $\ker g$ est stable par f. Soit $x \in \ker g$. Montrons que $f(x) \in \ker g$. Pour cela, calculons $g\big(f(x)\big) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(0_E) = 0_E$ et donc $x \in \ker f$.
- Montrons que $\operatorname{Im} g$ est stable par f. Soit $x \in \operatorname{Im} g$. D'après la question 2, $g(x) = x$. Montrons que $f(x) \in \operatorname{Im} g$. Calculons pour cela $g\big(f(x)\big) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x)$. D'après la question 2, on a bien $f(x) \in \operatorname{Im} g$.
- D'après la question 4, on a donc

$$\ker g = (\ker g \cap \ker f) + (\ker g \cap \operatorname{Im} f)$$

et

$$\operatorname{Im} g = (\operatorname{Im} g \cap \ker f) + (\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Im} f)$$

D'après la question 1, puisque g est un projecteur, on a alors

$$E = \ker g + \operatorname{Im} g = (\ker g \cap \ker f) + (\ker g \cap \operatorname{Im} f) + (\operatorname{Im} g \cap \ker f) + (\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Im} f)$$

$\boxed{Q\ 11}$

$(i) \Rightarrow (ii)$: comme $(f+g)$ est un projecteur, $(f+g)^2 = f + g$ d'où l'on tire $f \circ g + g \circ f = 0_{L(E)}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: en composant à gauche par f, on a $f^2 \circ g + f \circ g \circ f = 0_{L(E)}$. Mais comme f est un projecteur, $f^2 = f$ et d'après (ii), $f \circ g = -g \circ f$. D'où l'on tire $f \circ g - g \circ f^2 = 0_{L(E)}$ et donc $f \circ g = g \circ f$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: calculons $(f+g)^2 = f^2 + f\circ g + g \circ f + g^2 = f + g$ ce qui montre que $(f+g)$ est un projecteur.

1. Montrons que $\ker(f+g) = \ker f \cap \ker g$. Il est clair que $\ker(f \cap \ker g) \subset \ker(f+g)$. Montrons que $\ker(f+g) \subset \ker(f) \cap \ker g$. Soit $x \in \ker(f+g)$. On a $f(x) + g(x) = 0_E$. Mais en appliquant f, on trouve que $f^2(x) + f \circ g(x) = 0_E$ et comme $f^2 = f$ et $f \circ g = 0_{L(E)}$, il vient que $f(x) = 0_E$ donc que $x \in \ker f$. En appliquant g, on montre de même que $x \in \ker g$.
2. Montrons que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$. D'après la question 2, $f(x) = x$ et en appliquant g, $g \circ f(x) = g(x)$ et puisque $g \circ f = 0_{L(E)}$, $g(x) = 0_E$. Mais comme $x \in \operatorname{Im} g$, on a d'après 2, $g(x) = x$ et finalement, on trouve que $x = 0_E$. La somme $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ est donc directe.
3. Montrons que $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. L'inculusion $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ est claire. Montrons que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(f+g)$. Soit $x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Il existe $(x_f,x_g) \in \operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} g$ tels que $x = x_f + x_g$. Comme $x_f \in \operatorname{Im} f$, d'après la question 2, $f(x_f) = x_f$ et de même, $g(x_g) = x_g$. Calculons alors $(f+g)(x) = (f+g)(x_f + x_g) = f(x_f) + f(x_g) + g(x_f) + g(x_g) = f(x_g) + g(x_f) + x$. Mais puisque $x_f = f(x_f)$, $g(x_f) = g \circ f(x_f) = 0_E$ puisque $g \circ f = 0_{L(E)}$. De même, $f(x_g) = 0_E$ et donc $(f+g)(x) = x$, ce qui montre que $x \in \operatorname{Im}(f+g)$ toujours d'après la question 2.

$\boxed{Q\ 12}$

– La somme est directe, car

$$\ker g \cap \big(\ker f \cap \operatorname{Im} g) = (\ker g \cap \operatorname{Im} g) \cap \ker f = \{0_E\}$$

puisque g est un projecteur et que la somme $\ker g + \operatorname{Im} g$ est directe d'après 1.

– $\ker g + (\ker f \cap \operatorname{Im} g) \subset \ker f \circ g$: soit $x \in \ker g + (\ker f \cap \operatorname{Im} g)$. Il existe $(x_1,x_2) \in \ker g \times (\ker f \cap \operatorname{Im} g)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors

$$f \circ g(x) = f\big(g(x_1)\big) + f\big(g(x_2)\big) = 0_E$$

puisque $g(x_2) = x_2$ d'après 2 et que $x_2 \in \ker f$.

– $\ker f \circ g \subset \ker g + (\ker f \cap \operatorname{Im} g)$: Soit $x \in \ker(f \circ g)$. Comme g est un projecteur, $E = \ker g \oplus \operatorname{Im} g$. Donc il existe $(x_1,x_2) \in \ker g \times \operatorname{Im} g$ tels que $x = x_1 + x_2$. Mais alors $0_E = f \circ g(x) = f \circ g(x_2) = f(x_2)$ ce qui montre que $x_2 \in \ker f$.

$\boxed{Q\ 13}$

– $\supset$: soit $x \in \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} g + \ker f)$. Comme $x \in \operatorname{Im} g + \ker f$, il existe $(x_1,x_2) \in \operatorname{Im} g \times \ker f$ tels que $x = x_1 + x_2$. Comme $x_1 \in \operatorname{Im} g$, il existe $x_1' \in E$ tel que $x_1 = g(x_1')$. Donc $x = g(x_1') + x_2$. Mais comme $x \in \operatorname{Im} f$ et que f est un projecteur, $x = f(x) = f \circ g(x_1') + f(x_2) = f \circ g(x_1') \in \operatorname{Im} f \circ g$.

– $\subset$: soit $x \in \operatorname{Im}(f \circ g$, il existe $x_1 \in E$ tel que $x = f \circ g(x_1) = f\big(g(x_1)\big) \in \operatorname{Im} f$. Mais puisque f est un projecteur, on sait que $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$, et on peut donc décomposer le vecteur $g(x_1)$: $\exists (x',x'') \in \operatorname{Im} f \times \ker f$ tels que $g(x_1) = x' + x''$. Alors $x = f \circ g(x_1) = f(x') = x' = g(x_1) - x''$. Puisque $g(x_1) \in \operatorname{Im} g$ et $x'' \in \ker f$, on a bien $x \in \operatorname{Im} g + \ker f$.