

MPSI 2 : DL 3

pour le 05 décembre 2002

1 Exercice

Q 1 Montrer que $\forall x \in [0,1]$,

$$\arcsin \sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1)$$

On montrera le résultat dans un premier temps en étudiant une fonction et dans un deuxième temps, en utilisant la trigonométrie.

2 Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

2.1 Classification des sous-groupes de \mathbb{R}

Pour un réel strictement positif $\alpha > 0$, on note $\alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Q 2 Montrez que $\forall \alpha > 0$, la partie $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Q 3 Montrez que \mathbb{Q} est un sous-groupe de \mathbb{R} .

On considère maintenant un sous-groupe G du groupe $(\mathbb{R}, +)$. On va montrer l'alternative :

1. G est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$;
2. ou alors G est une partie dense de \mathbb{R} .

On note

$$G^+ = G \cap]0, +\infty[= \{x \in G \mid x > 0\}$$

Q 4 Si l'on suppose que $G \neq \{0\}$, montrez que la partie G^+ est non-vide, et qu'elle admet une borne inférieure $\alpha \geq 0$. Que vaut cette borne inférieure α lorsque $G = \mathbb{Z}$ et lorsque $G = \mathbb{Q}$?

On suppose dans un premier temps que $\alpha > 0$.

Q 5 Montrez que $\alpha \in G^+$. On pourra pour cela raisonner par l'absurde et utiliser la caractérisation de la borne inférieure avec $\varepsilon = \alpha$.

Q 6 Montrez alors que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

On suppose maintenant que $\alpha = 0$.

Q 7 Montrez que la partie G est dense dans \mathbb{R} .

2.2 Applications

On considère deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On définit alors

$$G(a,b) = \{pa + qb ; (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Q 8 Montrez que $G(a,b)$ est un sous-groupe de \mathbb{R} .

Q 9 On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{5}$.

1. Montrez que la borne inférieure α de G^+ vérifie $\alpha \geq \frac{1}{15}$;
2. Déterminez deux entiers $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $5u + 3v = 1$;
3. En déduire que $G(1/3,1/5) = \frac{1}{15}\mathbb{Z}$.

Q 10 On suppose dans cette question que $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$. On note α la borne inférieure de la partie G^+ .

1. Montrez que le réel $\sqrt{3}$ est irrationnel ;
2. Montrez que $\alpha = 0$.

On a donc montré que le sous-groupe $G(1,\sqrt{3})$ était dense dans \mathbb{R} .

Q 11 On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue qui est à la fois 1-périodique et $\sqrt{3}$ -périodique. On notera

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(0)\}$$

1. Montrez que $G(1,\sqrt{3}) \subset H$;
2. Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de H qui converge vers le réel x ;
3. En déduire que la fonction f est constante.

Corrigé.

Q 1 Considérons la fonction

$$f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \arcsin \sqrt{x} - \frac{1}{2} \arcsin(2x-1) \end{cases} \mathbb{R}$$

La fonction est définie sur $[0,1]$ car $\forall x \in [0,1], -1 \leq 2x-1 \leq 1$. Elle est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[$, on calcule

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} = 0$$

La fonction est donc constante sur le segment $[0,1]$. En prenant $x = 0$, on trouve que $f(0) = \frac{\pi}{4}$ d'où le résultat. Par la trigonométrie, soit $x \in [0,1]$. Il existe un unique $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que $x = \sin^2 \theta$. Alors $\arcsin(\sqrt{x}) = \theta$ et

$$\arcsin(2x-1) = \arcsin(-\cos(2\theta)) = \arccos(\cos(2\theta)) - \frac{\pi}{2} = 2\theta - \frac{\pi}{2}$$

d'où le résultat.

Q 2 Vérifions que $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}, +)$:

- $0 \in \alpha\mathbb{Z}$ ($0 = 0 \times \alpha$);
- Soient deux éléments $(x, y) \in (\alpha\mathbb{Z})^2$. Montrons que $(x-y) \in \alpha\mathbb{Z}$. Comme $x \in \alpha\mathbb{Z}$, il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $x = k_1\alpha$. De même, il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $y = k_2\alpha$. Alors $x-y = (k_1 - k_2)\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$.

Q 3 On le vérifie facilement comme à la première question.

Q 4 Comme on suppose que $G \neq \{0\}$, il existe un élément $g \neq 0$ dans la partie G . Comme G est un sous-groupe de \mathbb{R} , son symétrique $-g$ est également un élément de G . L'un des deux éléments g ou $-g$ est strictement positif et appartient donc à l'ensemble G^+ . Par conséquent, $G^+ \neq \emptyset$.

Comme G^+ est une partie non-vide de \mathbb{R} minorée par 0, elle admet une borne inférieure α et puisque 0 est un minorant de G^+ , $0 \leq \alpha$ (la borne inférieure d'une partie est le plus grand des minorants).

Q 5 Supposons par l'absurde que $\alpha \notin G$. D'après la caractérisation de la borne inférieure de G^+ , avec $\varepsilon = \alpha > 0$, il existe $g_1 \in G^+$ tel que $\alpha < g_1 < 2\alpha$. En posant ensuite $\varepsilon = g_1 - \alpha > 0$, il existe $g_2 \in G^+$ tel que $\alpha < g_2 < g_1$. Posons $g = g_1 - g_2$. Puisque G est un sous-groupe de \mathbb{R} , $g_1 - g_2 \in G$. Or $g > 0$ et donc $g \in G^+$. Mais alors on aurait $\alpha < g_2 < g_1 < 2\alpha$, et donc $0 < g < \alpha$, ce qui est impossible puisque $\alpha = \inf G^+$.

Q 6 Comme $\alpha \in G$, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, n\alpha \in G$. Par récurrence sur n :

$$\mathcal{P}(n) : n\alpha \in G$$

$\mathcal{P}(0)$ est vérifiée puisque comme G est un sous-groupe de \mathbb{R} , $0 \in G$.

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ D'après $\mathcal{P}(n)$, $n\alpha \in G$. Comme $\alpha \in G$ et que G est un sous-groupe de \mathbb{R} , $\alpha + n\alpha \in G$. Donc $(n+1)\alpha \in G$.

Ensuite, montrons que $\forall k \in \mathbb{Z}, k\alpha \in G$. Si $k \geq 0$, on a montré que $k\alpha \in G$. Si $k < 0$, alors $-k \in \mathbb{N}$ donc $(-k)\alpha \in G$. Mais comme G est un sous-groupe de \mathbb{R} , le symétrique d'un élément est encore dans G . Par conséquent, $-(-k)\alpha = k\alpha \in G$.

On a donc montré que $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. Montrons maintenant que $G \subset \alpha\mathbb{Z}$.

Soit $g \in G$. Comme $\alpha > 0$, d'après un théorème du cours, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\alpha \leq g < (k+1)\alpha$. On a $0 \leq g - k\alpha < \alpha$. Mais comme $k\alpha \in G$ (montré précédemment) et que $g \in G$, puisque G est un sous-groupe de \mathbb{R} , il vient que $h = g - k\alpha \in G$. Or $\alpha = \inf G^+$, et donc il est impossible que $h > 0$ puisque $h < \alpha$. Par conséquent, la seule possibilité est que $h = 0$, c'est à dire $g = k\alpha$. Mais alors $g \in \alpha\mathbb{Z}$.

Q 7 Soit un réel $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $g \in G$ tel que $|g-x| \leq \varepsilon$.

Comme $0 = \inf G^+$, par la caractérisation de $\inf G^+$, il existe un élément $g^+ \in G^+$ tel que $0 < g^+ < \varepsilon$. Alors d'après un théorème du cours, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $kg^+ \leq x < (k+1)g^+$. On a alors $0 \leq x - kg^+ < g^+ < \varepsilon$. Mais puisque $g^+ \in G$, et que G est un sous-groupe de \mathbb{R} , on a $kg^+ \in G$. Posons donc $g = kg^+ \in G$. Puisque $0 \leq x - g < \varepsilon$, on a bien $|x - g| \leq \varepsilon$.

Q 8 On le montre facilement.

Q 9

1. Soit $g \in G(1/3, 1/5)^+$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $g = \frac{p}{3} + \frac{q}{5} = \frac{5p + 3q}{15}$. Mais comme l'entier $(3p + 5q)$ est non nul ($g \in G^+$), il vérifie $|3p + 5q| \geq 1$ et donc $g = |g| \geq \frac{1}{15}$. Donc $1/15$ est un minorant de l'ensemble G^+ et donc sa borne inférieure vérifie $1/15 \leq \alpha$.
2. Il suffit de poser $u = 2$ et $v = -3$.
3. Comme $1/15 \in G^+$, on a $\alpha \leq 1/15$ et d'après la question précédente, on tire que $\alpha = 1/15$.
4. Comme $G(1/3, 1/5)$ est un sous-groupe de \mathbb{R} , et que $\alpha > 0$, d'après l'étude précédente, on sait que $G(1/3, 1/5) = \alpha\mathbb{Z}$.

Q 10

1. Par l'absurde, si $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, il existerait $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{3} = p/q$, mais alors on aurait $3q^2 = p^2$. Or en examinant la décomposition de p^2 en facteurs premiers, on voit que la puissance de 3 doit être paire, alors que dans la décomposition de $3q^2$ en facteurs premiers, cette puissance est impaire, une absurdité.
2. Par l'absurde, si $\alpha > 0$, on aurait alors $G(1, \sqrt{3}) = \alpha\mathbb{Z}$. Par conséquent, puisque $1 \in G$ et que $\sqrt{3} \in G$, il existerait deux entiers $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $1 = q\alpha$ et $\sqrt{3} = p\alpha$. On aurait alors $\sqrt{3} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, une absurdité.

Q 11

- On montre facilement par récurrence que $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+p) = f(x)$, puis que $\forall q \in \mathbb{Z}, f(x+q\sqrt{3}) = f(x)$ et enfin que $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}, f(p+q\sqrt{3}) = f(0)$. Donc $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, p+q\sqrt{3} \in H$ et donc $G(1, \sqrt{3}) \subset H$.
- Puisque $G(1, \sqrt{3})$ est dense dans \mathbb{R} ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h \in H \text{ tq } |x - h| \leq \varepsilon$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\varepsilon = 1/n > 0$, il existe $x_n \in H$ tel que $|x - x_n| \leq 1/n$. On construit ainsi une suite d'éléments de $G(1, \sqrt{3})$ c'est à dire d'éléments de H qui converge vers le réel x .

- Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite de points (x_n) de H telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$. Or puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in H$, on a $f(x_n) = f(0)$. Comme la fonction f est continue au point x , et que la suite (x_n) converge vers x , d'après le théorème de l'image continue d'une suite, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Or puisque la suite $(f(x_n))$ est constante, elle converge également vers $f(0)$. Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x) = f(0)$. On a montré que la fonction f était constante.