$\boxed{\text{MPSI 2 : DL 02}}$

pour le 12 novembre 2002

1 Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

On note $\mathcal{B}([0,1])$ l'ensemble des fonctions bornées sur le segment $[0,1]$. Pour une fonction $f \in \mathcal{B}([0,1])$, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$\boxed{Q\ 1}$ Montrez que $\|f\|_\infty$ est bien définie et que $\forall (f,g) \in \mathcal{B}([0,1])$,

$$\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

On considère une suite de fonctions (f_n) de $\mathcal{B}([0,1])$. On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge simplement* vers une fonction $f \ : \ [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge uniformément* vers une fonction f bornée sur $[0,1]$ si et seulement si :

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\boxed{Q\ 2}$ Montrez que si une suite de fonctions de $\mathcal{B}([0,1])$ converge uniformément vers une fonction f, alors la suite (f_n) converge simplement vers cette même fonction f.

$\boxed{Q\ 3}$ Trouvez un exemple d'une suite de fonctions continues sur le segment $[0,1]$ qui converge simplement vers une fonction f mais qui ne converge pas uniformément.

$\boxed{Q\ 4}$ On considère une suite (f_n) de fonctions continues sur le segment $[0,1]$. On suppose que cette suite de fonctions converge uniformément vers une fonction f. Montrez que la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$.

$\boxed{Q\ 5}$ Étudiez la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sqrt{n}e^{-nx} \end{array} \right.$$

2 Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes

On définit pour $n,k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$, les fonctions polynômiales de Bernstein :

$$\forall x \in [0,1],\ B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$\boxed{Q\ 6}$ Déterminez les fonctions polynômiales $B_0^3, B_1^3, B_2^3, B_3^3$. On les ordonnera selon les puissances croissantes.

$\boxed{Q\ 7}$ Calculez pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 2$ les sommes :

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x)$$

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx) B_k^n(x)$$

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 B_k^n(x)$$

On pourra utiliser la fonction définie par

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-x)^{n-k} = (t + 1 - x)^n$$

$\boxed{Q\ 8}$ Soit un réel $x \in [0,1]$, un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $d > 0$. On pose

$$A = \{k \in [\![0,n]\!] \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| > d\} \text{ et } B = \{k \in [\![0,n]\!] \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| \leq d\}$$

a) En séparant la somme S_2 en deux parties, montrez que

$$\sum_{k \in A} B_k^n(x) \leq \frac{x(1-x)}{nd^2}$$

b) En déduire que

$$\sum_{k \in A} B_k^n(x) \leq \frac{1}{4nd^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k \in B} B_k^n(x) \geq 1 - \frac{1}{4nd^2}$$

On considère maintenant une fonction f continue sur le segment $[0,1]$ et on définit pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynômiale

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$\boxed{Q\ 9}$ En calculant la somme

$$\sum_{k=0}^{n} B_k^n(x) \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right]$$

et en utilisant la continuité uniforme de la fonction f, montrez que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[0,1]$. On a démontré le théorème de Weierstrass : une fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Comme la fonction f est bornée, la partie $|f|([0,1])$ est non-vide et majorée. Elle admet donc une borne sup. Soit $x \in [0,1]$. En utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|(f+g)(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Par passage à la borne sup. on obtient l'inégalité souhaitée.

$\boxed{Q\ 2}$ Soit $x \in [0,1]$. Montrons que la suite de réels $\big(f_n(x)\big)$ converge vers le réel $f(x)$. Comme la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par définition de $\|.\|_\infty$, il vient donc que

$$|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème de majoration, on en déduit que la suite $\big(f_n(x)\big)$ converge vers $f(x)$.

$\boxed{Q\ 3}$ Considérons la suite $(f_n)_{n\ge1}$ de fonctions définies par :

$$f_n : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1-nx & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]1/n,1] \end{cases} \end{array}\right.$$

On vérifie facilement que $\forall n \ge 1$, la fonction f_n est continue sur le segment $[0,1]$. Montrons que cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases} \end{array}\right.$$

Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 0$, puisque $\forall n \ge 1$, $f_n(0) = 1$, la suite de réels $f_n(0)$ est constante et converge vers

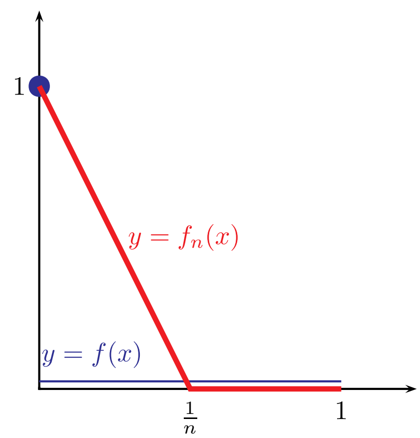

Fig. 1 – *Une suite de fonctions convergeant simplement, mais pas uniformément*

$1 = f(0)$. Si $x \in]0,1]$, pour $n \ge 1/x$, on a $f_n(x) = 0$ et donc la suite de réels $f_n(x)$ converge vers $0 = f(x)$. On a donc montré que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f.
Mais $\forall n \ge 1$, il est facile de voir (en passant à la limite lorsque $x \to 0$) que $\|f_n - f\|_\infty = 1$ et donc que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément.
La suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$ fournit un autre exemple classique. Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1[$ valant 1 en 1 , mais pas uniformément vers cette fonction.

$\boxed{Q\ 4}$ Soit $x_0 \in [0,1]$. Montrons que la fonction f est continue au point x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N,\ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$$

Comme la fonction f_N est continue au point x_0,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall x \in [0,1],\ |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \varepsilon/3$$

Soit alors $x \in [0,1]$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha$. Utilisons l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \Big|[f(x) - f_N(x)] + [f_N(x) - f_N(x_0)] + [f_N(x_0) - f(x_0)]\Big| \\
&\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq \|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \|f_N - f\|_\infty \\
&\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 5}$

1. Convergence simple : soit $x \in [0,1]$. Si $x = 0$, la suite de réels $f_n(x)$ est nulle et converge vers 0. Si $x \in]0,1]$, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x\sqrt{n}e^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (l'exponentielle l'emporte devant la puissance). La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle.
2. Montrons que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} f_n(x)$$

En effet, la fonction f_n est positive et atteint son maximum sur le segment $[0,1]$. En calculant $f_n'(x) = \sqrt{n}e^{-nx}(1 - nx)$ et en traçant le tableau de variations de la fonction f_n, on s'aperçoit qu'elle atteint son maximum en $x_0 = 1/n$. Ce maximum vaut $f_n(1/n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}e}$. Donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\boxed{Q\ 6}$ On trouve $B_0^3 = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$, $B_1^3 = 3X - 6X^2 + 3X^3$, $B_2^3 = 3X^2 - 3X^3$ et $B_3^3 = X^3$.

$\boxed{Q\ 7}$ On trouve que $S_0(x) = 1$ (formule du binôme). Considérons la fonction F de l'énoncé. On calcule

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = xF'(x) = nx \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = xF'(x) + x^2F''(x) = n(n-1)x^2$$

En développant, on trouve alors

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - nxS_0(x) = \boxed{0}$$

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - 2n^2x^2 + n^2x^2S_0(x) = \boxed{nx(1-x)}$$

$\boxed{Q\ 8}$ Écrivons

$$S_2(x) = \sum_{k\in A}(k - nx)^2B_k^n(x) + \sum_{k\in B}(k - nx)^2B_k^n(x) \geq \sum_{k\in A}(k - nx)^2B_k^n(x)$$

Mais pour $k \in A$, $(k - nx)^2 \geq (nd)^2$ et puisque $S_2(x) = nx(1 - x)$, on trouve finalement que

$$nx(1-x)(nd)^2 \geq \sum_{k\in A} B_k^n(x)$$

d'où le résultat.
Puisque le trinôme $x(1-x)$ atteint son minimum au milieu des racines, $\forall x \in [0,1]$, $x(1-x) \geq \dfrac{1}{4}$ et donc on trouve la première inégalité. La deuxième s'obtient en remarquant que

$$1 = S_0(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x) = \sum_{k\in A} B_k^n(x) + \sum_{k \in B} B_k^n(x)$$

$\boxed{Q\ 9}$ Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Donc il existe $d > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|x-y| \leq d \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$. Soit alors $x \in [0,1]$. Comme $\sum_{k=0}^{n} B_n^k(x) = 1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \Big|\sum_{k=0}^{n} B_k^n(x)\big[f(k/n) - f(x)\big]\Big| \\
&\leq \sum_{k\in A} B_k^n(x)\big|f(k/n) - f(x)\big| + \sum_{k\in B} B_k^n(x)\big|f(k/n) - f(x)\big| \\
&\leq \frac{2M}{4nd^2} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in B} B_k^n(x)
\end{aligned}$$

Car la fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée. Nous avons noté $M = \|f\|_\infty$ et utilisé la majoration de $\sum_{k\in A} B_k^n(x)$ de la question 8. La majoration de la deuxième somme provient du fait que $\forall k \in B$, $|(k/n) - x| \leq d$ et donc $|f(k/n) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Comme $\sum_{k\in B} B_k^n(x) \leq \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x) \leq 1$, nous pouvons continuer à majorer :

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{M}{2nd^2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme le membre de droite est indépendant de x, on peut passer à la borne supérieure pour obtenir :

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \frac{M}{2nd^2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons alors $N = E(M/d^2) + 1$. Soit $n \geq N$, on a alors

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \frac{M}{2Nd^2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nous avons donc montré que toute fonction continue sur le segment $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.