MPSI 2 : DL 01

pour le 19/09/2002

1 Problème

On considère un ensemble non-vide E et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E. On définit respectivement la *limite inf* et la *limite sup* de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\liminf X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcap_{p\geq n} X_p \Big)$$

$$\limsup X_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{p\geq n} X_p \Big)$$

$\boxed{Q\ 1}$ Soit un élément $x \in E$. Traduire à l'aide de quantificateurs $x \in \liminf X_n$. Traduire de même que $x \in \limsup X_n$.

$\boxed{Q\ 2}$ Montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset \liminf X_n \subset \limsup X_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

$\boxed{Q\ 3}$ On considère deux suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E. Montrer que

a. $\liminf(X_n \cap Y_n) = \liminf X_n \cap \liminf Y_n$.

b. $\liminf X_n \cap \liminf Y_n \subset \limsup(X_n \cap Y_n) \subset \limsup X_n \cap \limsup Y_n$.

c. $\limsup X_n \cup \limsup Y_n = \limsup(X_n \cup Y_n)$.

On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E est *convergente* lorsque $\liminf X_n = \limsup X_n$. On appellera alors *limite* de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la partie $\liminf X_n = \limsup X_n$.

$\boxed{Q\ 4}$ Si $E = \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{n\}$, est-ce que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ?

$\boxed{Q\ 5}$ Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de E croissante pour l'inclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \subset X_{n+1}$$

alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$\boxed{Q\ 6}$ Construire un exemple de suite non-convergente.

$\boxed{Q\ 7}$ Monter que si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = E \setminus X_n$ converge également.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = X_n \cap Y_n$ est également convergente.

$\boxed{Q\ 9}$ Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes, alors la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = X_n \cup Y_n$ est également convergente.

$\boxed{Q\ 10}$ On considère deux ensembles E, F et une application $f : E \mapsto F$. Considérons une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de F convergente. Montrer que la suite $(f^{-1}(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de E convergente.

$\boxed{Q\ 11}$ On considère toujours deux ensembles E, F et une application $f : E \mapsto F$. Exhiber un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E qui soit convergente mais telle que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de F ne soit pas convergente. Donner une condition suffisante portant sur l'application f pour que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

2 Exercice

$\boxed{Q\ 12}$ Soit un ensemble E non-vide. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : E \mapsto \mathcal{P}(E)$ qui soit surjective.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ On a successivement en appliquant les définitions de la réunion et de l'intersection d'une famille :

$$x \in \liminf X_n \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x \in \bigcap_{p \geq n} X_p \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ x \in X_p$$

Ceci signifie que l'on peut trouver un entier n tel que x est dans tous les ensembles d'indice plus grand que n. Évidemment, cet entier n n'est pas unique : tous les entiers $n' \geq n$ conviennent également. De même,

$$x \in \limsup X_n \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n,\ x \in X_p$$

Ceci signifie que x est dans des ensembles d'indices arbitrairement grands.

$\boxed{Q\ 2}$ Montrons successivement les trois inclusions.

1. Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. On a alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $x \in X_p$. On veut montrer que $x \in \liminf X_n$. D'après la première question, il suffit d'exhiber un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n$, $x \in X_p$. De façon immédiate, $n = 0$ convient.
2. Soit $x \in \liminf X_n$. Il existe donc un entier n_1 tel que $\forall p \geq n_1$, $x \in X_p$. Montrons que $x \in \limsup X_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $p = \max(n,n_1)$. On a alors $p \geq n$ et puisque $p \geq n_1$, on a également $x \in X_p$.
3. Soit $x \in \limsup X_n$. Posons $n = 0$, d'après la caractérisation de $\limsup X_n$ vue à la première question, il existe $p \geq n = 0$ tel que $x \in X_p$. Ainsi, par définition de l'union d'une famille, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

$\boxed{Q\ 3}$

a. Montrons une double inclusion :
   - $\subset$: soit $x \in \liminf(X_n \cap Y_n)$. Par définition de la limite inf, $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n,\ x \in X_p \cap Y_p$. Montrons que $x \in \liminf X_n$. Posons $n' = n$. Alors soit $p \geq n'$, $x \in X_p$. Nous avons donc montré que $x \in \liminf X_n$. De la même façon, on montre que $x \in \liminf Y_n$.
   - $\supset$. Soit $x \in \liminf X_n \cap \liminf Y_n$. D'après la définition de $\liminf X_n$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_1$, $x \in X_p$. De même, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_2$, $x \in X_p$. Posons $n = \max(n_1,n_2)$. Soit alors $p \geq n$. Puisque $p \geq n \geq n_1$, $x \in X_p$ et puisque $p \geq n \geq n_2$, $x \in Y_p$. Donc $x \in X_p \cap Y_p$. Nous avons bien montré que $x \in \liminf X_p \cap Y_p$.

b.
   - Montrons que $\liminf X_n \cap \liminf Y_n \subset \limsup(X_n \cap Y_n)$. Soit $x \in \liminf X_n \cap \liminf Y_n$. Puisque $x \in \liminf X_n$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_1$, $x \in X_p$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_2$, $x \in Y_p$. Montrons que $x \in \limsup(X_n \cap Y_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $p = \max(n,n_1,n_2)$. On a $p \geq n$ et puisque $p \geq n_1$, $x \in X_p$ et comme $p \geq n_2$, $x \in Y_p$. Par conséquent, $x \in X_p \cap Y_p$.
   - Montrons que $\limsup(X_n \cap Y_n) \subset \limsup X_n \cap \limsup Y_n$. Soit $x \in \limsup(X_n \cap Y_n)$. Montrons que $x \in \limsup X_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $x \in \limsup(X_n \cap Y_n)$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in X_p \cap Y_p$. On a donc $x \in X_p$. On montre de même que $x \in \limsup Y_n$.

c.
   - $\subset$: soit $x \in \limsup X_n \cup \limsup Y_n$. Étudions les deux cas possibles :
     (a) $x \in \limsup X_n$. Montrons que $x \in \limsup(X_n \cup Y_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $x \in \limsup X_n$, $\exists p \geq n$ tel que $x \in X_p$. À fortiori, $x \in X_p \cup Y_p$. Par conséquent, $x \in \limsup(X_n \cup Y_n)$.
     (b) $x \in \limsup Y_n$: de même.
   - $\supset$: Par l'absurde, supposons $x \notin \limsup X_n \cup \limsup Y_n$. Comme $x \notin \limsup X_n$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_1$, $x \notin X_p$. De même, puisque $x \notin \limsup Y_n$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_2$, $x \notin X_p$. Posons alors $n = \max(n_1,n_2) \in \mathbb{N}$. Puisque $x \in \limsup(X_n \cup Y_n)$, $\exists p \geq n$ tel que $x \in X_p \cup Y_p$. Étudions alors les deux cas :
     (a) $x \in X_p$. Puisque $p \geq n \geq n_2$, $x \notin X_p$: impossible.
     (b) $x \in Y_p$. Puisque $p \geq n \geq n_1$, $x \notin Y_p$: impossible.

     Les deux cas étant impossibles, on a abouti à une contradiction.

$\boxed{Q\ 4}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $\bigcap_{p\geq n} X_p = \emptyset$, il vient que $\liminf X_n = \emptyset$. De même, soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $\bigcup_{p\geq n} X_p = [\![p,+\infty]\!]$, $\limsup X_n = \emptyset$. La suite (X_n) est donc convergente et sa limite est l'ensemble vide.

$\boxed{Q\ 5}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite (X_n) est croissante, $C_p = \bigcap_{p\geq n} X_p = X_n$. Par conséquent, $\liminf X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Vérifions que $\limsup X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

- $\subset$: soit $x \in \limsup X_n$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \geq n$ tel que $x \in X_p$. Prenons $n = 0$, il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_p$, c'est à dire $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

– $\supset$: soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_{n_0}$. Puisque la suite (X_n) est croissante, $\forall p \geq n_0$, on a $x \in X_p$. Montrons alors que $x \in \limsup X_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $p = \max(n,n_0)$. Puisque $p \geq n_0$, on a bien $x \in X_p$.

La suite (X_n) est convergente et sa limite est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
On aurait pu faire une autre démonstration en montrant d'abord que $\limsup X_n \subset \liminf X_n$: soit $x \in \limsup X_n$, Posons $n = 0$, comme $x \in \limsup X_n$, $\exists p \geq 0$ tel que $x \in X_p$. Par une récurrence immédiate, puisque la suite (X_n) est croissante, on montre alors que $\forall p \geq p_0$, $x \in X_p$. Posons alors $n_0 = p_0$. On a bien $\forall p \geq n_0$, $x \in X_p$ ce qui montre que $x \in \liminf X_n$. Ensuite, il suffit d'utiliser la question 2, qui montre qu'on a toujours $\liminf X_n \subset \limsup X_n$. Par conséquent, $\liminf X_n = \limsup X_n$ et la suite est convergente.

$\boxed{Q\ 6}$ Considérons la suite (X_n) de parties définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{cases} \{1\} & \text{si } n \text{ pair} \\ \{0,1\} & \text{si } n\text{impair} \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{p\geq n} X_p = \{1\}$ et donc que $\liminf X_n = \{1\}$. De même, on vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{p\geq n} = \{0,1\}$ et donc que $\limsup X_n = \{0,1\}$. La suite (X_n) n'est pas convergente.

$\boxed{Q\ 7}$ Notons $L = \liminf X_n = \limsup X_n$. Utilisons les propriétés du passage au complémentaire d'une famille vues en cours :

$$\liminf(E \setminus X_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcap_{p\geq n} (E \setminus X_p) \Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E \setminus (\bigcup_{p\geq n} X_p) = E \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} X_p) = E \setminus L$$

De même, on montre que $\limsup(E \setminus X_n) = E \setminus (\liminf X_n) = E \setminus L$. La suite (X_n) est donc convergente et sa limite est $(E \setminus L)$.

$\boxed{Q\ 8}$ Notons $L = \liminf X_n = \limsup X_n$ et $L' = \liminf Y_n = \limsup Y_n$. D'après la question 3a, $\liminf(V_n) = L \cap L'$. D'après la question 3b,

$$L \cap L' \subset \limsup V_n \subset L \cap L'$$

ce qui montre que $\limsup V_n = L \cap L' = \liminf V_n$. La suite (V_n) est bien convergente et sa limite vaut $L \cap L'$.

$\boxed{Q\ 9}$ Passons aux complémentaires. Il suffit de voir que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$X_n \cup Y_n = E \setminus \big((E \setminus X_n) \cap (E \setminus Y_n) \big)$$

Le résultat découle alors des questions 8 et 7.

$\boxed{Q\ 10}$ On a vu en cours que si $(B_i)_{i\in I}$ était une famille de parties de F, alors $f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ et que $f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. En utilisant les définitions des limites inf. et sup. il vient immédiatement que

$$f^{-1}(\liminf Y_n) = \liminf f^{-1}(X_n) \text{ et } f^{-1}(\limsup Y_n) = \limsup f^{-1}(Y_n)$$

Par conséquent, si (Y_n) converge vers L, la suite $(f^{-1}(Y_n))$ converge vers $f^{-1}(L)$.

$\boxed{Q\ 11}$ Voici un contre-exemple. Considérons les ensembles $E = F = \mathbb{N}$ et la suite de parties définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{n\}$. On a vérifié que $\liminf X_n = \limsup X_n = \emptyset$, donc la suite est convergente. Considérons l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

On vérifie facilement que pour $p \in \mathbb{N}$,

$$f(X_p) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } p \text{ pair} \\ \{1\} & \text{si } p \text{ impair} \end{cases}$$

et que $\liminf f(X_n) = \emptyset$ et que $\limsup f(X_n) = \{0,1\}$. La suite $f(X_n)$ n'est donc pas convergente.

La raison pour laquelle le résultat est faux en général est que pour une application f arbitraire, $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ mais qu'on n'a pas l'égalité en général (voir le cours). Par contre si f est *injective*, pour une famille $(A_i)_{i \in I}$ quelconque, $f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$. On montre alors que si f est *injective*, $\liminf f(X_n) = f(\liminf X_n)$ et $\limsup f(X_n) = f(\limsup X_n)$. Par conséquent, si la suite (X_n) est convergente, il en est de même de la suite $(f(X_n))$.

$\boxed{Q\ 12}$ Par l'absurde, s'il existait $f : E \mapsto \mathcal{P}(E)$ surjective, on pourrait considérer la partie

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(X)\}$$

Comme $A \in \mathcal{P}(E)$ et que f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $A = f(x)$. Étudions deux cas :

- si $x \in A$, par définition de A, on aurait $x \notin f(x) = A$ ce qui est impossible.
- si $x \notin A$, par définition de A, on aurait $x \in f(x) = A$ ce qui est également impossible.

Les deux cas mènent à une absurdité.